ONCE

cálculo por calculadora

José Enrique Fernández del Campo



GUÍAS

ONCE

CÁLCULO POR CALCULADORA

José Enrique Fernández del Campo

GUIAS

Madrid, octubre 2004

Cálculo por calculadora
José Enrique Fernández del Campo.

Primera edición: Madrid, 2004

© De esta edición: Organización Nacional de Ciegos Españoles (ONCE)
Dirección General. Dirección de Educación.
Calle del Prado, 24, 28014 Madrid

© El autor

Coordinador: Javier López del Rio

Diseño de la cubierta:ONCE -Dirección de Comunicación e Imagen, Gabinete de Diseño.

Realización de la edición: ONCE-Dirección de Cultura y Deporte.
Departamento de Recursos Culturales.

La presente edición ha estado al cuidado de Carmen Roig.

ISBN: 84-484-0147-6
D.L.:M-10.188-2005
Realización gráfica: Carácter, S.A.
Impreso en España - Printed in Spain

ÍNDICE

Presentación

1. LA CALCULADORA EN RELACIÓN CON OTRAS FORMAS DE CÁLCULO

2. INTRODUCCIÓN SEGÚN PREVISIONES CURRICULARES

3. LA CALCULADORA DEL «BRAILLE HABLADO». FICHAS-EJERCICIO

3.1 Cuestiones previas

3.2 Notificaciones, órdenes y funciones en la calculadora del «Braille Hablado»

A) Funciones de la calculadora básica

1. «Entrar» y «salir» de la calculadora: «cor-o, c» y «cor-z»

2. Escritura de cifras

3. Igual a ejecutar: «cor-e»

4. Parámetros de voz más adecuados. Selección rápida: «cor-y, n»

5. Lectura de números: dígito a dígito o «como palabra»: «cor-f»

6. Borrar todo «cor-356»

7. ¿Qué llevo escrito?...: «cor-c»

8. Borrar el último signo o cifra: «cor-b»

9. Sumar«+»(235)

10. Restar«-»(36)

11. Operaciones «en cadena»

12. Multiplicar «*» (256)

13. ¿Por qué operación empiezo? Jerarquía de las operaciones aritméticas

14. Paréntesis matemáticos: 12356, 23456

15. Las memorias: «cor-s»

16. El resultado viajero

17. Dividir «/» (34)

18. Números con coma; la «coma decimal»«,»(2)
19. «Modo fraccionario» y «modo decimal»: «cor-34»
20. Número de cifras decimales. Precisión: «cor-p»
21. Fracciones impropias y «números mixtos»
22. Potencias de exponente natural (I). Recurso a «memorias»
23. Potencias de exponente natural (II). La operación «^» (45) «elevado a»
24. Traducir en la calculadora los «paréntesis auxiliares Braille»
25. Tanto por ciento:«%»(456)
26. Raíz cuadrada: «cor-345»
27. Redondeo de decimales y aproximaciones por defecto y por exceso

B). Funciones de la calculadora científica

28. División entera. Las funciones «trunc» y «div»
29. Resto de la división entera. La función «mod»
30. Media aritmética. La función «avg»
31. Sumatorio. La función «sum»
32. Mediana. La función «median»
33. El número «pi»
34. Potencias de exponente entero negativo
35. Cálculo «en archivo» o «extra-calculadora»: el comando «OK»
36. Notación científica. La letra-operador «E»
37. Potencias generales. La función «power» y el signo «^» (45)
38. Raíces generales (I). La función «root»
39. Raíces generales (II). Mediante la función «power» o el signo «^» (45)
40. Desviación típica y varianza. La función «stddev»
41. Definición de «funciones personales» (I). Mediante «cálculos en archivo

42. Definición de «funciones personales» (I). Mediante «macros en calculadora»

43. Comprobación de soluciones de ecuaciones

44. Comprobación de soluciones de un sistema de ecuaciones

45. Generación de progresiones aritméticas

46. Generación de progresiones geométricas. «Macros de iteración automática»

47. índices y sucesiones generales

48. Factorial (la función «fact»)

49. Números combinatorios

50. El número «e». Exponenciales. (La función «exp»)

51. Logaritmos y funciones logarítmicas (las funciones «log», «In», «alog» y «aln»)

52. Funciones circulares o trigonométricas. Cambio entre «medidas sexagesimales» y «radianes»

4. PEQUEÑA LUDOTECA

A) Escritura de números

B) Construcciones de números

C) Decimales

D) Memorias

E) Funciones

Volver al Índice

PRESENTACIÓN

¡Qué lástima disponer de un instrumento, y no obtener de él todo el provecho posible!

Ésta es la preocupación que ha guiado la redacción del presente trabajo,

La calculadora -cualquiera que sea su potencia y modelo-es una herramienta que, además de ahorrar a todos tiempo, esfuerzo y riesgos de error, puede ayudar a no pocos estudiantes a superar dificultades básicas en Matemáticas: ciertas manipulaciones simbólicas, experiencias de fracasos calculatorios, ocasiones de retraso, error y aun ridículo... La calculadora es -debe ser- una *buena compañera* que ayude a los más débiles en su debilidad, y a los más hábiles en sus afanes de adentrarse por campos de abstracción, libres de los lastres de la rutina.

Pero es tan sólo una herramienta. En dos sentidos: hay que aprender a utilizarla y tiene usos limitados a su diseño.

El *diseño* comporta *limitaciones* en las *posibilidades.* Pero tan triste sería atribuirle posibilidades que no posee, como dejar de explotar las que realmente tiene. O no estar prevenido contra *trampas* y *errores de funcionamiento,* que no faltan en cualquier artilugio.

Y el aprendizaje de un manejo correcto y exhaustivo de una calculadora sólo es posible -me atrevería a decir- experimentando con ella de forma sistemática; partiendo de las situaciones más triviales y llegando hasta las más forzadas, extremas y atrevidas.

Estas páginas intentan precisamente estos dos objetivos, referidos al modelo de calculadora hoy por hoy más empleado en España por los estudiantes ciegos: la calculadora parlante incorporada al **Braille Hablado.** Si se alcanzan en alguna medida, me sentiré muy satisfecho. El juicio corresponde a los usuarios -los estudiantes de todos los niveles- y a sus asesores -los profesores de aula y de apoyo así como los instructores de tiflotecnología y braille-.

En el primer capítulo se reflexiona brevemente sobre el papel que juega o debe jugar el uso de la calculadora en la escuela, en relación con las otras dos formas de cálculo: el mental y el escrito.

En el segundo, se contempla de forma concreta el papel que se confiere a la calculadora en los currícula más frecuentes en España -incluidos los marcados por los Decretos de desarrollo de la "Ley Orgánica de Calidad de la Educación" 10/2002, vigente en el momento en que se escriben estas páginas-, determinando objetivos de destrezas para cada ciclo de la educación primaria y cada curso de la educación secundaria, estableciendo su correspondencia con **Unidades** del Capítulo 3.

El cuerpo central del trabajo lo constituye el capítulo 3: una colección de **Unidades didácticas,** eminentemente prácticas, destinadas a describir el

funcionamiento y *máxima explotabilidad* -así lo creo- de la calculadora de referencia (la incorporada al **Braille Hablado).** No obstante circunscribirse a una modalidad y modelo concretos, podría generalizarse sin demasiada dificultad a otros, ya que el funcionamiento básico es semejante. En cualquier caso, sería común el itinerario operatorio propuesto, paralelo al previsto por las disposiciones oficiales.

Por último, el capítulo 4 ofrece una pequeña colección de apenas medio centenar de ejercicios y situaciones numéricas que, por su ingrediente lúdico, pueden colaborar con el docente a incitar en el alumno la puesta en práctica de destrezas en el manejo de la calculadora, desarrollar las aptitudes y estrategias del pensamiento numérico mediante el instrumento concreto. En la literatura didáctica pueden encontrarse otros muchos de carácter general, aunque no siempre accesibles al estudiante ciego.

La monografía ha sido escrita deprisa, sin tiempo apenas para el contraste. Pero el punto de partida es la experiencia didáctica: el trabajo con estudiantes de Secundaria durante los últimos años en el Centro de Recursos Educativos «Antonio Vicente Mosquete» de la ONCE en Madrid. A ellos corresponde la autoría en la denuncia, provocación y validación de la mayoría de los procedimientos y usos prácticos que aquí se presentan. Y a ellos, aunque sea *a posteríorí,* va mi reconocimiento y dedicatoria. Y a mi calculadora, claro.

A mi madre, a quien *no le gustaban los números...*

Volver al Índice / Inicio de la Presentación

1. LA CALCULADORA EN RELACIÓN CON OTRAS FORMAS DE CÁLCULO

Parece preferible la expresión *cálculo por calculadora,* en el doble significado causal de la preposición: agente e instrumental, de mediación. La calculadora es la que efectúa realmente el cálculo, a partir de los elementos que se le introducen -operandos y operación-; pero no sería eficaz si previamente no se determinan qué operación, qué operandos y en qué orden suministrárselos; no pudiendo tampoco imputársele los errores de pulsación.

Aparentemente, la calculadora ahorra los esfuerzos habituales que conlleva el cálculo escrito: ejercicio continuado del cálculo mental, representación secuencial, control y corrección de errores materiales y tiempo. Pero no exime de la posibilidad de errores de pulsación por inadvertencia (la elevada frecuencia de este tipo de errores nos mueve a recordarlos continuamente).

Los críticos con el empleo de la calculadora como instrumento de cálculo en la escuela alegan que *«el alumno acabará por no saber operar».* Nos preguntamos si con el cálculo escrito pasará del «siete por ocho, cincuenta y seis», pues, en cuanto aplique el «seis, y llevo cinco» sin ser consciente del significado del *llevo* -que es algo más que *cinco unidades de orden superior-,* estaríamos ante un automatismo análogo al de pulsar teclas.

Es preciso aprender a usar la calculadora en la escuela. Este aprendizaje no se refiere tan sólo a las *instrucciones de empleo:* valor de las teclas o comandos, orden de pulsación, borrados, registros de memoria, límites, tipo de aproximación, aplicación en cálculos iterados y diseño de algoritmos, etc. Un aspecto fundamental es el de establecer la correspondencia entre situación real de cálculo, expresión escrita o simbólica e instrucciones o secuencias de pulsación, sus analogías y diferencias, tanto morfológicas y sintácticas como -sobre todo- *semánticas.*

Hay que aprender a obtener de la calculadora el máximo rendimiento o, lo que es lo mismo: saber aplicar la *forma de cálculo más útil,* en función de *la situación a resolver.* Es decir: advertir (¡huir!) de la concepción y empleo de la calculadora como instrumento único o primordial, con riesgo de convertirse en señora y dueña de nuestras destrezas de cálculo -hasta el extremo de anularlas- para considerarla como instrumento estrictamente auxiliar, sometido a nuestra capacidad de control de los procesos y situaciones. *Tenemos que llegar a conseguir que el escolar decida cuándo conviene usarla y cuando no hace falta, por lo tanto, no se deben tener escondida, sino accesible y provocar su uso.*[1]

Frente a cálculos aritméticos engorrosos, la calculadora ahorra tiempo, fatiga, errores y bloqueos por fobias simbólico-matemáticas. Pero sería igualmente absurdo recurrir a la calculadora para efectuar cálculos que por escrito se efectuarían con análogas garantías: 3X1955 = 5865 no tiene por qué llevar más tiempo en escribirse que en pulsar las teclas. En multitud de situaciones, la realización mental o escrita de operaciones es totalmente asequible sin error, con un mínimo de entrenamiento. El recurso a calculadora o escritura es

cuestión, sobre todo, del carácter de la operación y del tamaño y tipo de operandos.

Por otra parte, el apego sistemático al cálculo por calculadora puede llegar a ser nefasto: ¿qué hacer, cuando se aborden las fracciones enteras y sus operaciones, las ecuaciones y funciones?

El empleo escolar de la calculadora puede tornarse también invitación al cálculo mental, en dos campos bien distintos:

a) Mediante el control que por cálculo mental puede realizarse del efectuado por calculadora. Con tres principales detectores de error:

—Cifra de las unidades de menor orden. Si al multiplicar por calculadora 437X1898 el resultado que apareciera fuese 823732, está claro que algo falla: en la cifra de las unidades debiera aparecer un 6 -fruto de **7X8=56-** nunca un 2.

—Resultado al operar las cifras de orden mayor. Sería un tanto extraño que 283X5469 nos diera 981727: al multiplicar 2X5, por muchas unidades del orden anterior que debiéramos añadir, nunca aparecería un 9... (tal vez se pulsó un **3** en lugar del **5** para **5469...)**

—Estimación global. Si multiplicando 1248X3579 la respuesta fuese 43835592, en alguna parte nos hemos equivocado: *«mil y pico, por tres mil y pico»* andaría entre *«tres millones»* y *«ocho millones»,* jamás por los *«cuarenta y pico millones».* (Obsérvese que aquí sí se satisfacen los criterios de las *cifras extremas.)*

b) Existe toda una gama de juegos que combinan ambas formas entre sí y una y otra con la aproximación: «la tecla misteriosa», «el número desconocido», etc. Para su aplicación incluso en niveles elementales.[2]

Mediante sencillos algoritmos o convenios -«la tecla del 5 no funciona», por ejemplo, o «sólo funcionan la tecla del 2 y del 3», etc.- se diseñan situaciones que invitan a la investigación numérica e introducen en dominios conceptuales diversos: múltiplos y divisores, números primos, descomposición factorial..., o en el complejo mundo de los números decimales.

Respecto del cálculo escrito, la calculadora presta un servicio inestimable: la comprobación de resultados. Es decir: como *instrumento de control,* denunciador de posibles errores:

---

[1] Véase, por ejemplo: ALSINA C, C. BURGUES, J. M. FORTUNY, J. GIMENEZ, M. TORRA (1996): *Enseñar Matemáticas.* Ed. Graó, Barcelona. Pág. 137.

[2] Véase, por ejemplo: ALSINA (1989): *La calculadora en la escuela,*-GRUPO 0 (Ismael Blasco y otros) (1997): *Matemáticas: materiales curriculares de Enseñanza Primaria,* M.E.C. Edelvives, Valencia.

a) Con la coincidencia de resultados entre los cálculos efectuados por escrito y el obtenido en la calculadora se adquiere confianza y se despejan posibles aversiones simbólicas.

b) La no coincidencia puede -debe- desencadenar:

—Invitación, en primer lugar, a la aplicación de técnicas de control por Cálculo Mental: *«análisis de cifras extremas», «comparación global»,* etc. (ver más arriba).

—Recurso a técnicas específicas: *«pruebas del 9».*

—En última instancia, obliga a revisar los *«cálculos elementales»,* en busca de errores puntuales causantes del resultado incorrecto, apercibiendo, a su vez, de reincidencias y posibles contumacias: olvidos de *«hechos elementales»,* error en las *«llevadas»...*

Respecto del cálculo escrito, la calculadora adquiere un carácter complementario. Es por ello aconsejable anteponer el aprendizaje y primera práctica en algoritmos al empleo sistemático de la calculadora: *durante la fase de comprensión del algoritmo, conviene prohibir su uso por cuanto puede ser sobreutilizada* [3]. Pero es innegable su ventaja en caso de cálculos complicados (cantidades grandes, iteraciones, decimales, etc.)

Además, en el caso de alumnos con ciertas necesidades educativas especiales, la calculadora permite el progreso en Matemáticas, cuando sería imposible de otra forma, por resultarles objetivamente imposible superar sus carencias aptitudinales y aún actitudinales. Es el caso de alumnos con frágil retentiva -incapaces de memorizar los *«hechos numéricos elementales»* o *tablas* de operaciones-, aquellos otros con problemas para fijar la atención, dificultades para la escritura, etc. La calculadora se convierte entonces en un *elemento de integración* educativa y social.

La deficiencia visual exige características especiales en las calculadoras a emplear:

—A los alumnos con resto visual aprovechable les bastará, en principio, un modelo de calculadora con *display* de caracteres suficientemente grandes, fáciles de distinguir y contraste / brillo *adecuados.* Sin embargo, son desaconsejable los *displays de cristal líquido,* que requieren distancia mínima de observación e iluminación adecuada.

—Aquellos que sean ciegos totales o cuyo resto visual les impida la lectura cómoda de *displays* ópticos precisarán de modelos de *calculadora parlante,* cada vez más abundantes en el mercado a precio asequible. El *Braille Hablado,* por ejemplo, incorpora calculadora de potencia variable según versión. Las calculadoras con *display braille,* aunque existen, son escasas y tienen un precio elevado.

---

[3] MAZA GÓMEZ, C, (1991): *Multiplicar y dividir,* Visor-Aprendizaje,. Madrid, pág. 127.

El trabajo en el aula o por grupos impone una limitación muy conveniente: un modelo único de calculadora para todos los alumnos; de lo contrario, las posibilidades de investigación son dispares, pudiendo provocarse situaciones desorientadoras. Recomendación imposible de llevar a la práctica al trabajar en un centro ordinario con niños ciegos que se sirvan de calculadoras adaptadas (la del *Braille Hablado,* por ejemplo), y que impedirá o dificultará gravemente ciertas actividades -juegos por parejas- aunque siempre pueden sustituirse o adaptarse sin merma notable de eficacia didáctica.

Volver al Índice / Inicio del Capitulo

2. INTRODUCCIÓN SEGÚN PREVISIONES CURRICULARES

2.1 Educación primaria

Conforme con las consideraciones del capítulo anterior, podemos concluir:

Principios didácticos

La calculadora debe estar disponible de forma habitual desde los primeros niveles de Educación Primaria. En concreto:

—Como alternativa de escritura de cantidades. Ya que, al exigir una forma expresiva distinta de la escritura simbólica (pulsar teclas o comandos), conviene que una y otra se sigan inmediatamente en el tiempo.

—En juegos y actividades divergentes. Desde el momento en que pueda ser utilizada como instrumento de refuerzo y provocadora del cálculo mental, graduando su uso al nivel de destreza alcanzado en este último.

—Como instrumento de control para el cálculo escrito y el mental. Tras el aprendizaje y adquisición de un cierto nivel de destreza en el correspondiente algoritmo, empleándola como medio generador de seguridad y recurso autónomo para la denuncia de errores.

—Como instrumento de investigación de propiedades numéricas y generación de estrategias constructivas.

Exigencias curriculares

Las normas generales vigentes en España (Ley 10/2002 de Calidad de la Educación, y Decreto de desarrollo 830/2003, Anexo), si bien se refieren a la «introducción de las nuevas tecnologías desde los primeros niveles educativos» -y, en concreto, de la calculadora en el área matemática-, aportan poca luz a la hora de concretar **Objetivos:**

—Objetivo 4. Resolver y plantear problemas matemáticos utilizando los procedimientos adecuados de cálculo, medida, estimación y comprobación de resultados.

—Objetivo 7. Aprovechar los recursos tecnológicos para el descubrimiento, la exposición, la profundización y la ampliación de los contenidos matemáticos, y para relacionar estos contenidos con otros de las distintas áreas del currículo.

Pero apenas explotan las destrezas a adquirir en su manejo en los **Criterios de Evaluación** (niveles mínimos de exigencia).

No obstante, las disposiciones de las autoridades educativas de las Comunidades Autónomas y las programaciones de aula -los libros de texto, en

particular- descienden a mayores concreciones, relativas a los **Objetivos y Contenidos** previstos para cada ciclo o curso. Y éste es el criterio que se ha seguido aquí para determinar una supuesta «exigencia curricular».

Primer ciclo (2º nivel)

Como **Contenidos** relacionados directamente con el Cálculo, aparecen:[1]

—Aritmética y medida. 1. Los números naturales. El Sistema de Numeración Decimal: cifras y valor posicional de las cifras.

—Operaciones con números naturales: adición y sustracción. Estimación,

Y, entre los **Criterios de Evaluación:**

—Leer, escribir y ordenar números naturales de hasta tres cifras, indicando el valor posicional de sus cifras.

Concretando, para el manejo de la calculadora, con referencia a las Unidades desarrolladas a continuación, en el capítulo 3:

Educación Primaria. Primer Ciclo.

a) Funcionamiento elemental	1 **Entrar** y **salir** de la calculadora
	2 Escritura de cifras
	3 **Igual a: ejecutar**
	4 Parámetros de voz más adecuados. Selección rápida
b) Escritura / modificación de cantidades	5 Lectura de números
	6 Borrar todo
	7 ¿Qué llevo escrito?...
	8 Borrar el último signo o cifra
b) Escritura / modificación de cantidades	9 Sumar
	10 Restar
	11 Operaciones en **cadena**

Segundo ciclo

Contenidos relativos a Cálculo, previstos por la Normativa General:

—1. Los números naturales. El Sistema de Numeración Decimal. Cifras. Valor posicional de las cifras. Equivalencias.

—2. Operaciones con números naturales: adición, sustracción, multiplicación y división.
—3. Concepto de fracción. Iniciación al número decimal.

---

[1] En todo lo que sigue, no se trata de *enunciados íntegros* de los **Contenidos y Criterios de Evaluación** según aparecen en los Anexos de los mencionados Decretos. Son, más bien, *extractos* o *reseñas* referentes a aspectos de Cálculo en los que pueden tener aplicación directa la calculadora básica o científica.

En los **Criterios de Evaluación:**

—2. Calcular sumas, restas y multiplicaciones, y dividir un número de hasta seis cifras por otro número de una cifra.

—6. *Utilizar la calculadora* para la estimación, aproximación y comprobación de resultados numéricos en las operaciones matemáticas con números naturales.

—7. Leer, escribir y representar fracciones cuyo denominador sea un número menor que diez.

Cálculo por calculadora

Que para el aprendizaje del manejo de la calculadora -a agregar a los indicados para el Primer Ciclo-, implicarían:

Educación Primaria. Segundo Ciclo.

a) Funcionamiento general	15 **Las memorias**
	16 El **resultado** *viajero*
b) Escritura / modificación de cantidades	18 Números con **coma**
	19 Modo fraccionario y **modo decimal**
b) Escritura / modificación de cantidades	12 Multiplicar
	13 ¿Por qué operación empiezo?
	14 Paréntesis matemáticos
	17 Dividir

Tercer ciclo

Contenidos:

—I. Aritmética y medida. 1. Números naturales y sus operaciones: propiedades y relaciones. Iniciación a la potenciación. Iniciación a la divisibilidad.

—3. La fracción y el número decimal. Propiedades y operaciones.

—III. Representación de la información. 1. Frecuencia absoluta y relativa.

Criterios de Evaluación:

—7. *Utilizar la calculadora* para la estimación, aproximación y comprobación de resultados numéricos en las operaciones matemáticas con números naturales y números decimales.

—8. Leer, escribir, ordenar y operar con fracciones y números decimales, y resolver problemas sencillos en los que se utilicen: la fracción, el número decimal, la relación entre ellos, el redondeo y el tanto por ciento.

—14. Calcular la media aritmética y la moda.

Exigirían, al utilizar la calculadora:

Educación Primaria. Tercer Ciclo.

a) Funcionamiento general	20 Número de cifras decimales: Precisión
b) Escritura / modificación de cantidades	21 Fracciones impropias y números mixtos
	24 Traducir los paréntesis auxiliares Braille
	27 Redondeo de decimales y aproximaciones
	33 El número «pi»
c) Operaciones y funciones	22 Potencias de exponente natural (I). Recurso a memorias
	23 Potencias de exponente natural (II). La operación elevado a
	25 Tanto por ciento
	26 Raíz cuadrada
	28 División entera: las funciones trunc y div
	29 Resto de la división entera: la función mod
	30 Media aritmética: la función avg
	31 Sumatorio: la función sum
	32 Mediana: la función median

2.2 Educación secundaria obligatoria

Principios didácticos

En esta etapa, la calculadora pasa a convertirse en un instrumento más de trabajo del alumno, debiendo tenerla inexcusablemente «a mano».

La «calculadora básica» cederá su puesto a la «calculadora científica» de forma casi irreversible, por las operaciones y funciones de segundo nivel que esta segunda incluye y que son objeto de utilización frecuente. Sin embargo, pueden y deben agotarse exhaustivamente los recursos de la primera; más como «situación de aprendizaje e investigación» que como recurso práctico.

—Como alternativa y control de escritura de cantidades (fracciones enteras y decimales, notación científica, potencias, etc.)

—Como instrumento de control para el «cálculo pensado». Simultáneamente con el aprendizaje, aplicación y adquisición de un cierto nivel de destreza en estrategias, empleándola como medio generador de seguridad y recurso autónomo para la denuncia de errores.

—Como instrumento para la investigación de propiedades numéricas.

—Como instrumento para la generación de algoritmos especiales y estrategias constructivas.

—Como mero instrumento de cálculo, economizador de tiempo y riesgos de error, o sustitutorio de otros recursos escritos (tablas trigonométricas, logarítmicas, mercantiles, etc.)

—Como paso intermedio al empleo de recursos informáticos de mayor potencia (hojas de cálculo u otros programas especiales).

Exigencias curriculares

El Decreto 831/2003, por el que se establecen las «Enseñanzas Comunes» con carácter general -como desarrollo de la Ley 10/2002 de Calidad de la Educación-, observa (en su Anexo, y en lo correspondiente al Área Matemática):

-«El ciudadano del siglo XXI no puede ignorar el funcionamiento de estas herramientas (las calculadoras y los ordenadores) con el fin de servirse de ellas; pero debe hacerlo siempre de forma racional; no puede, por ejemplo, quedar indefenso ante la necesidad de realizar un cálculo sencillo cuando no tiene a mano su calculadora. Por ello no es recomendable la utilización de calculadoras antes de que las destrezas del cálculo elemental hayan quedado bien afianzadas.»

Lejos de entender esta última matización como «limitación», debe considerarse como «imperativo a recuperar y aun adquirir «ex novo» destrezas que debieran haberse adquirido durante la Educación Primaria». Ya que advierte a continuación:

—«la calculadora y ciertos programas informáticos, resultan ser recursos investigadores de primer orden en el análisis de propiedades y relaciones numéricas y gráficas y en este sentido debe potenciarse su empleo»

Aunque, de nuevo, apenas se menciona el manejo de calculadoras en los Objetivos de Etapa:

—Objetivo 4. Utilizar con soltura y sentido crítico los distintos recursos tecnológicos (calculadoras, programas informáticos) de forma que supongan una ayuda en el aprendizaje y en las aplicaciones instrumentales de las Matemáticas.

—Objetivo 5. Resolver problemas matemáticos utilizando diferentes estrategias, procedimientos y recursos, desde la intuición hasta los algoritmos.

Como sucedía al intentar determinar las «Exigencias Curriculares» relativas a la calculadora para la Educación Primaria, las Disposiciones de las autoridades educativas de las Comunidades Autónomas y las Programaciones de aula -y los libros de texto- concretarán los Objetivos y Contenidos previstos para cada Curso en relación con el Cálculo Aritmético y Algebraico.

Primer y segundo curso

En sus **Contenidos** relativos al Cálculo, apenas si supone novedad de conceptos y procedimientos ya conocidos y aplicados en el Tercer Ciclo de la Educación Primaria:

Primer Curso: 1. Aritmética y álgebra. Números naturales. El sistema de numeración decimal. Divisibilidad. Fracciones y decimales. Operaciones elementales. Redondeos. Potencias de exponente natural. Raíces cuadradas exactas. Porcentajes.

Segundo Curso: 1. Aritmética y álgebra. Relación de divisibilidad. Operaciones elementales con fracciones, decimales y números enteros. Jerarquía de las operaciones y uso del paréntesis. Estimaciones, aproximaciones y redondeos. Raíces cuadradas aproximadas. Precisión y estimación en las medidas. Porcentajes.

2. Utilizar las aproximaciones numéricas, por defecto y por exceso.

Pero sí explícita mayor exigencia en los **Criterios de Evaluación** fijados, análogos para ambos cursos:

3. Estimar y calcular expresiones numéricas sencillas de números enteros y fraccionarios (basadas en las cuatro operaciones elementales y las potencias de exponente natural que involucren, como máximo, dos operaciones encadenadas y un paréntesis), aplicando correctamente las reglas de prioridad y haciendo un uso adecuado de signos y paréntesis.

7. Emplear las fórmulas adecuadas para obtener longitudes y áreas de las figuras planas, en un contexto de resolución de problemas geométricos.

9. Obtener la moda y la media aritmética de una distribución discreta sencilla, con pocos datos, *utilizando, si es preciso, una calculadora de operaciones básicas.*

Descendiendo al detalle en el manejo de la calculadora, y, de nuevo, con referencia a las «Unidades-Actividad» recogidas en el Apartado 2, supondría, a fin de cuentas, la revisión y afianzamiento del empleo exhaustivo de los recursos de calculadora y técnicas específicas supuestamente adquiridos durante la Educación Primaria. Volvamos a enunciarlos:

Educación Secundaria Obligatoria. Cursos 1º y 2º.

a) Funcionamiento elemental y general	1 Entrar y salir de la calculadora
	2 Escritura de cifras
	3 Igual a: ejecutar
	4 Parámetros de voz más adecuados. Selección rápida
	15 Las memorias
	16 El resultado viajero
	20 Número de cifras decimales: Precisión
b) Escritura / modificación de cantidades	5 Lectura de números
	6 Borrar todo
	7 ¿Qué llevo escrito?...
	8 Borrar el último signo o cifra
	18 Números con coma
	19 Modo fraccionario y modo decimal
	21 Fracciones impropias y números mixtos
	24 Traducir los paréntesis auxiliares Braille
	27 Redondeo de decimales y aproximaciones
	33 El número «pi»
c) Operaciones y funciones	9 Sumar
	10 Restar
	11 Operaciones en cadena
	12 Multiplicar
	13 ¿Por qué operación empiezo?
	14 Paréntesis matemáticos
	17 Dividir
	22 y 23 Potencias de exponente natural
	25 Tanto por ciento
	26 Raíz cuadrada
	28 y 29 División entera: las funciones trunc, div y mod
	30 Media aritmética: la función avg
	31 Sumatorio: la función sum
	31 Sumatorio: la función sum

Tercer curso

Aparece como nuevo dominio el Álgebra. Lo que implica un salto cualitativo hacia el Cálculo Algebraico. El Cálculo Aritmético se hace más complejo en sus expresiones, sobre todo como soporte para aquélla.

La diferencia entre Opciones se manifiesta más en una profundización que en una diversificación de **Contenidos** (ver cursiva negrita)

—Opción A. 1. Aritmética y álgebra. Números racionales. Operaciones elementales y potencias de exponente entero. Jerarquía de las operaciones y uso del paréntesis. Aproximaciones y errores. Sucesiones numéricas. Iniciación a las progresiones aritméticas. Polinomios. Operaciones elementales.

Resolución algebraica de ecuaciones de primer grado y sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

—4. Estadística y probabilidad. Parámetros de centralización y dispersión.

—Opción B. 1. Aritmética y álgebra. Números racionales. Operaciones elementales y potencias de exponente entero. Jerarquía de las operaciones y uso del paréntesis. Aproximaciones y errores. Sucesiones numéricas. Iniciación a las progresiones aritméticas y ***geométricas***. Resolución algebraica de ecuaciones de primer grado y sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. ***Ecuación de segundo grado***.

—4. Estadística y probabilidad. Parámetros de centralización y dispersión.

Pero apenas se observan diferencias en los **Criterios de Evaluación** (ver cursiva negrita):

—Opción A. 2. Estimar y calcular expresiones numéricas sencillas de números racionales (basadas en las cuatro operaciones elementales y las potencias de exponente entero que contengan, como máximo, dos operaciones encadenadas y un paréntesis), aplicar correctamente las reglas de prioridad y hacer un uso adecuado de signos y paréntesis.

—4. Construir expresiones algebraicas y ecuaciones sencillas a partir de sucesiones numéricas, tablas o enunciados e interpretar las relaciones numéricas que se dan, implícitamente, en una fórmula conocida o en una ecuación.

—5. Resolver ecuaciones de primer grado y sistemas sencillos de ecuaciones lineales con dos incógnitas que tengan coeficientes enteros.

—11. Parámetros estadísticos más usuales (moda, mediana y media aritmética), correspondientes a distribuciones sencillas y utilizar, si es necesario, una calculadora científica.

—Opción B. 2. Estimar y calcular expresiones numéricas sencillas de números racionales (basadas en las cuatro operaciones elementales y las potencias de exponente entero que involucren, como máximo, dos operaciones encadenadas y un paréntesis), aplicar correctamente las reglas de prioridad y hacer uso adecuado de signos y paréntesis.

—4. Construir expresiones algebraicas y ecuaciones sencillas a partir de sucesiones numéricas, tablas o enunciados e interpretar las relaciones numéricas que se dan, implícitamente, en una fórmula conocida o en una ecuación.

—5. Resolver ecuaciones de primer grado o ***ecuaciones de segundo grado*** y sistemas sencillos de ecuaciones lineales con dos incógnitas que tengan coeficientes enteros.

—11. Parámetros estadísticos más usuales (moda, mediana, media aritmética y ***desviación típica***), correspondientes a distribuciones sencillas y utilizar, si es necesario, una calculadora científica.

El Cálculo Algebraico propiamente dicho exigirá el recurso a herramientas de más alto nivel, como son los llamados *«programas informáticos de Cálculo Racional»,* que superan las posibilidades del Braille Hablado.

Los cálculos numéricos en relación con expresiones algebraicas precisarán de recursos tecnológicos importantes en particular, de *«calculadoras programables».* Como se indicaba al comienzo de esta Sección, la calculadora del Braille Hablado cubre esta necesidad, gracias a sus «memorias» y la posibilidad de crear «macros». Entre las Unidades de la Sección 2 se ejemplifican:

Educación Secundaria Obligatoria. Tercer Curso.

a) Funcionamiento general	35 Cálculo *en archivo o extracalculadora»:* el comando *OK*
b) Escritura de expresiones	41 Definición de *funciones personales* (I). Mediante *cálculos en archivo*
	42 Definición de *funciones personales* (II). Mediante **macros *de calculadora***
	45 Generación de *progresiones aritméticas*
	46 Generación de *progresiones geométricas.* **Macros de *iteración automática***
	47 *Índices* y *sucesiones generales*
c) Operaciones y funciones	34 Potencias de exponente *entero negativo*
	37 Potencias generales
	40 *Desviación típica* y *varianza:* la función **stddev**
	43 Comprobación de soluciones de *ecuaciones*
	44 Comprobación de soluciones de un *sistema de ecuaciones*

Cuarto curso

Con análogas consideraciones para las Opciones que las realizadas para el Curso Tercero (ver cursiva negrita):

—Opción A. 1. Aritmética y álgebra. Iniciación al número real. Notación científica. Operaciones en notación científica. Potencias de exponente fraccionario y radicales. Polinomios. Ecuaciones de primer y segundo grado. Sistemas de ecuaciones lineales.

—3. Funciones y gráficas. Funciones. Estudio gráfico de una función. Características globales de las gráficas: crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos, continuidad, simetrías y periodicidad. Interpretación y lectura de gráficas en problemas relacionados con la vida cotidiana.

—4. Estadística y probabilidad. Cálculo de los parámetros de centralización.

—Opción B. 1. Aritmética y álgebra. Iniciación al número real. Notación científica. Operaciones en notación científica. Potencias de exponente fraccionario y radicales. Ecuaciones de primer y segundo grado. Sistemas de ecuaciones lineales.

—3. Funciones y gráficas. Funciones. Estudio de las funciones exponenciales y de proporcionalidad inversa sencillas.

—4. Estadística y Probabilidad. Cálculo de los parámetros de centralización y dispersión. Utilización de distintas técnicas combinatorias en la asignación de probabilidades simples y compuestas.

Y, entre los **Criterios de Evaluación:**

—Opción A. 2. Estimar y calcular expresiones numéricas sencillas de números racionales (basadas en las cuatro operaciones elementales y las potencias de exponente entero que contengan, como máximo, tres operaciones encadenadas y un paréntesis), aplicar correctamente las reglas de prioridad y hacer un uso adecuado de signos y paréntesis.

—3. Simplificar expresiones numéricas irracionales sencillas (que contengan una o dos raíces cuadradas) y utilizar convenientemente la calculadora científica en las operaciones con números reales, expresados en forma decimal o en notación científica y aplicar las reglas y las técnicas de aproximación adecuadas a cada caso y valorando los errores cometidos.

—6. Resolución de ecuaciones de primer o de segundo grado o de sistemas sencillos de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

—7. Utilizar las unidades angulares del sistema métrico sexagesimal así como las relaciones y las razones de la trigonometría elemental para resolver problemas trigonométricos de contexto real, con la ayuda, si es preciso, de la calculadora científica.

—11. Parámetros estadísticos más usuales, correspondientes a distribuciones discretas y continuas, con ayuda de la calculadora.

—Opción B. 2. Estimar y calcular expresiones numéricas sencillas de números racionales (basadas en las cuatro operaciones elementales y las potencias de exponente entero que involucren, como máximo, tres operaciones encadenadas y un paréntesis), aplicar correctamente las reglas de prioridad y hacer un uso adecuado de signos y paréntesis.

—3. Simplificar expresiones numéricas irracionales sencillas (que contengan una o dos raíces cuadradas) y utilizar convenientemente la calculadora científica en las operaciones con números reales, expresados en forma decimal o en notación científica y aplicar las reglas y las técnicas de aproximación

adecuadas a cada caso y valorando los errores cometidos.

—6. Resolución de ecuaciones de primer o de segundo grado o de sistemas sencillos de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

—7. Utilizar las unidades angulares del sistema métrico sexagesimal así como las relaciones y las razones de la trigonometría elemental para resolver problemas trigonométricos de contexto real, con la ayuda, si es preciso, de la calculadora científica.

—9. Funciones exponenciales y de proporcionalidad inversa sencillas a través de tablas de valores significativos, con la ayuda, si es preciso, de la calculadora científica.

—11. Parámetros estadísticos más usuales, correspondientes a distribuciones discretas y continuas, con ayuda de la calculadora.

Apenas si se precisarán nuevos recursos de la calculadora del Braille Hablado, distintos de los requeridos para el Tercer Curso:

Educación Secundaria Obligatoria. Cuarto Curso

a) Funcionamiento general	35 Cálculo *en archivo o extracalculadora»:* el comando *OK*
b) Escritura / modificación de cantidades	36 Notación científica. La letra-operador *E*
	41 Definición de *funciones personales* (I). Mediante *cálculos en archivo*
	42 Definición de *funciones personales* (II). Mediante **macros de *calculadora***
	45 Generación de *progresiones aritméticas*
	46 Generación de *progresiones geométricas.* **Macros de *iteración automática***
	47 *Índices* y *sucesiones generales*
c) Operaciones y funciones	34 Potencias de exponente *entero negativo*
	37 Potencias generales
	38 Raíces generales (I): la función **root**
	39 Raíces generales (II): las *raíces* como *potencias*
	40 *Desviación típica* y *varianza:* la función **stddev**
	43 Comprobación de *soluciones de ecuaciones*
	44 Comprobación de *soluciones de un sistema de ecuaciones*
	48 *Factorial:* la función **fact**
	49 Números combinatorios
	50 El número «e». Exponenciales: la función **exp**
	51 *Logaritmos* y *funciones logarítmicas:* las funciones **log, ln, alog y aln**
	52 Funciones *circulares o trigonométricas.* Cambio entre *medidas sexagesimales* y *radianes*

Volver al Índice / Inicio del Capitulo

3. LA CALCULADORA DEL BRAILLE HABLADO

3.1 Cuestiones previas

Como se señalaba en el capítulo 1, el *Braille Hablado* incorpora una *calculadora parlante* de potencia más que aceptable.

En la inmensa mayoría de los modelos utilizados por los estudiantes españoles (versiones posteriores a 1998), esta calculadora está dotada de las funciones propias de una *calculadora científica.* Pero cuenta con otras posibilidades que la convierten en un instrumento especialmente interesante:

a) Posibilidad (aunque limitada) de trabajar con fracciones enteras.

b) 25 memorias de almacenamiento numérico.

c) Cálculos *en archivo de texto;* aplicable incluso a expresiones literales con referencia a dichas *memorias de calculadora.*

d) Creación de *«macros» (miniprogramas* configurados por series de órdenes o comandos del equipo), que pueden actuar sobre valores depositados en las *memorias de calculadora.* Aunque con limitaciones, la convierten en una verdadera *calculadora programable.*

La utilización escolar de la calculadora del Braille Hablado presenta, sin embargo, dificultades que conviene poner de manifiesto cuanto antes.

1ª) En los niveles elementales de enseñanza, se tropieza con el inconveniente de *la no correspondencia entre «código de calculadora» y «código de escritura Braille».*

El Braille Hablado cuenta para la introducción de datos con un teclado Braille análogo al de la *máquina Perkins.* Por lo general, el alumno de Educación Primaria *escribe* en el Braille Hablado, utilizando para la escritura de textos el «código Braille ordinario» es decir con idénticas pulsaciones de teclas que en la *máquina Perkins* y que, al imprimirse, dan lugar a los mismos signos escritos que aparecen en los libros de texto.

En el *«modo calculadora»,* sin embargo, se trabaja en «código braille computerizado», en el que las cifras y los signos de la mayoría de las operaciones difieren del «ordinario». Lo que implica que el estudiante deberá manejarse en dualidad de símbolos-órdenes de escritura para una docena de signos, precisamente los más elementales en matemáticas.

No obstante, existe un contrapeso que atenúa este inconveniente: mientras que en la lectura del Braille sobre papel se hace precisa una *interpretación* o *decodificación,* no así en el Braille Hablado, al *verbalizar inmediata y gratuitamente* los signos y expresiones en términos de habla natural. Ya sea en archivos de texto escritos en «código Braille ordinario» bajo *«Transcriptor de Braille: Sí»,* o para los escritos en «código Braille computerizado» bajo

«Transcriptor de Braille: No»; siendo este último el caso de la calculadora. Es decir: dispone de un mecanismo de autoalimentación, de refuerzo y posibilidad de corrección inmediata, con los que no cuenta la escritura en papel.

Esta dificultad es, a fin de cuentas, *una mayor complejidad en el aprendizaje.* Pero la experiencia ha mostrado que se supera fácilmente: la destreza es fruto de la práctica y se asienta de forma rápida y perdurable.

Por otra parte, conviene recordar que aun los modelos ordinarios de calculadora, con teclas diferentes para cada cifra y operación, exigen al usuario ciego el recurso a un *«código posicional»,* ciertamente, más sencillo que el de *«combinación de teclas»* del Braille, pero *código,* al fin y al cabo, en *convenio local.* (Recordemos que el alumno que ve dispone del refuerzo del símbolo dibujado en la tecla.)

2ª) Diferencias *sintácticas* entre expresiones escritas y a la hora de introducirlas en la calculadora, para ciertas operaciones y comandos.

No tendría mayor importancia, si ocurriera solamente con funciones propias de la *calculadora científica.* Pero sucede también con ciertas *operaciones* de la *calculadora básica: tanto por ciento, potencias...*

Se trata de diferencias escasas y puntuales, y que surgen en momentos relativamente avanzados del curriculum (Tercer Ciclo de Educación Primaria). Conceptualmente, se resuelven incorporando supuestos sencillos de explicar y comprender: el signo... encierra entre paréntesis todo lo que se encuentra a su *izquierda.* O bien: antes de actuar, la operación ... ejecuta un *«igual»* (calcula lo anterior).

Por contra, la introducción de datos en la calculadora del Braille Hablado -en cualquier calculadora- es de carácter *secuencial* o *lineal,* análoga a la del Braille. Incluso exige de *«paréntesis auxiliares»,* para transformar expresiones que, en la escritura en tinta, tienen carácter *bidimensional;* como son los cocientes, exponentes y radicandos complejos. En este sentido, la *comunicación* con su calculadora se hace más asequible al estudiante ciego que al que ve.

3ª) La calculadora del Braille Hablado obliga a realizar la comunicación entre alumnos a través de la verbalización o *lectura* del usuario, que si bien es la forma habitual para el alumno ciego, priva al que ve del referente visual. Lo que puede repercutir en el diseño de Actividades comunes en un contexto de *centro ordinario.*

Deberá, pues, concebirse como *instrumento de trabajo estrictamente personal.*

3.2 Notaciones, órdenes y funciones en la calculadora del B.H.

Se presenta a continuación una colección de Unidades o «Fichas de trabajo» en las que se detalla el funcionamiento de la calculadora del Braille Hablado. Pueden agruparse en cuatro tipos:

—Funcionamiento elemental del *modo calculadora.*

—Lectoescritura de cantidades y operaciones aritméticas, propias de una *calculadora básica.*

—Operaciones y funciones propias de una *calculadora científica.*

—Aplicaciones *marginales* y novedosas -pero muy útiles-, aprovechando recursos del Braille Hablado, no presentes en calculadoras ordinarias.

El número aparentemente elevado de *52 Unidades* no debe alarmar: se hace un análisis casi exhaustivo de las posibilidades de aplicación de la calculadora y corresponden a su empleo a lo largo de todo el curriculum de la Educación Obligatoria, desde Primer Nivel de Educación Primaria, hasta 4º Curso de Educación Secundaria. Es decir: salvo que padezca desfase en el aprendizaje de su manejo, al alumno sólo le corresponderán *5 ó 6 Unidades por curso académico.*

Al margen de los *comandos* necesarios para el manejo general del *modo calculadora,* el conjunto se ha estructurado siguiendo -aproximadamente- la introducción de conceptos y técnicas en el curriculum oficial actualmente vigente en España (ver capítulo 2). La división en dos grandes bloques, según *Funciones de la Calculadora Básica* y *Científica,* tienen una excepción: «la potenciación de exponente natural mediante el *signo «elevado a».* Precisamente esta operación mediante el signo resultado de pulsar las teclas 4 y 5 (^), que llamamos «elevado a», es un hallazgo al margen del manual del equipo, que exime del recurso a la función *power,* propia de una *calculadora científica.*

Cada *«Ficha»* incluye, junto con la definición de la operación, función o *comando,* una descripción detallada y ejemplificada de su *sintaxis* o forma de introducirla en *expresiones de calculadora* y su comparación con la *escritura en Braille ordinario,* ejercicios a realizar por el alumno, observaciones sobre posibles excepciones o casos marginales y advertencias sobre *situaciones de error.*

Aunque se ha intentado una redacción en estilo directo y sencillo, pensando en que el lector podría ser el mismo alumno, parece más recomendable que su contenido sea transmitido por el profesor modulando el ritmo, multiplicando y graduando los ejemplos, descubriendo y corrigiendo posibles errores, etc. es por ello recomendable para el docente -profesor o instructor- emplazarse *«en la misma situación de aprendizaje en la que se verá el alumno».* Se detectarán así de antemano errores y deficiencias que, sin duda, aparecerán pese a las varias revisiones por las que ha pasado el texto.

Finalmente, advertimos de la importancia de que en los primeros estadios se establezca en el Braille Hablado una configuración de *«Parámetros de voz»* que permitan al alumno detectar por sí mismo los errores de pulsación. Es decir: con *Teclado hablado,* velocidad e intensidad convenientes, etc. (ver

Unidad 4).

A) FUNCIONES DE LA CALCULADORA BÁSICA

Este apartado está constituido por unidades didácticas, numeradas del 1 al 27 que, como se ha indicado, incluyen funciones y operaciones de la calculadora propias de la Educación Primaria. Aunque están escritas simulando un diálogo con el alumno, y en su parte esencial podría seguirlas de forma auntónoma, sólo pretenden servir de sugerencia o modelo para el profesor / instructor.

1. «Entrar» y «salir» de la calculadora: «cor-o, c» y «cor-z»
2. Escritura de cifras
3. Igual a ejecutar: «cor-e»
4. Parámetros de voz más adecuados. Selección rápida: «cor-y, n»
5. Lectura de números: dígito a dígito o «como palabra»: «cor-f»
6. Borrar todo «cor-356»
7. ¿Qué llevo escrito?...: «cor-c»
8. Borrar el último signo o cifra: «cor-b»
9. Sumar «+»(235)
10. Restar «-»(36)
11. Operaciones «en cadena»
12. Multiplicar «*» (256)
13. ¿Por qué operación empiezo? Jerarquía de las operaciones aritméticas.
14. Paréntesis matemáticos: 12356, 23456
15. Las memorias: «cor-s»
16. El resultado viajero
17. Dividir «/» (34)
18. Números con coma; la «coma decimal»«,»(2)
19. «Modo fraccionario» y «modo decimal»: «cor-34»
20. Número de cifras decimales. Precisión: «cor-p»

21. Fracciones impropias y «números mixtos»

22. Potencias de exponente natural (I). Recurso a «memorias»

23. Potencias de exponente natural (II). La operación «^» (45) «elevado a»

24. Traducir en la calculadora los «paréntesis auxiliares Braille»

25. Tanto por ciento: «%»(456)

26. Raíz cuadrada: «cor-345».

27. Redondeo de decimales y aproximaciones por defecto y por exceso

1. Entrar y salir de la calculadora: «cor-o, c», «cor-z»

El «Braille Hablado» tiene una «fábrica» o «taller» propio, donde se producen números a partir de otros números: la «CALCULADORA».

Es muy fácil de manejar. Sólo que «hay que hablarle» en un lenguaje algo diferente del que usamos al escribir Braille en papel o en los archivos normales: también se escribe con las siete teclas, pero los signos para las cifras y las operaciones son algo distintos, y las letras valdrán... ¡Ya lo iremos viendo!

No te asustes: es muy sencillo, y lo aprenderás sin grandes esfuerzos a lo largo de estas fichas.

¿Entramos?...

Después de encender el Braille Hablado, estés donde estés, pulsa:

cor-o c

y oirás que responde:

calculadora preparada

El comando **cor-o** se utiliza en el Braille Hablado para seleccionar todo tipo de funciones: hora, fecha, cambiar de archivo... La «**c**», como es lógico, se refiere a **«calculadora».**

Después de haber hecho en la calculadora los cálculos que necesitas, sales sin más que pulsar:

cor- z

El Braille Hablado responde:

salida

y vuelves al mismísimo sitio que estabas.

¿A que es fácil?

Si no pulsas bien **cor-z,** en lugar de «Salida», puede que oigas:

comando de calculadora erróneo

o no oirás nada o... Y no habrás salido: sigues en la calculadora y deberás intentar pulsar de nuevo **cor-z.**

Dentro de la calculadora puedes probar a escribir letras, cifras numéricas, signos cualesquiera, órdenes... Pero la calculadora quizás te diga cosas tales como:

error: error de sintaxis

Quiere decir que le estás escribiendo cosas que ella no entiende: ya te he advertido que es preciso «hablar su lenguaje».

Si lo haces correctamente, ella responderá a tus deseos. Un poco de tiempo y os entenderéis a las mil maravillas, y le sacarás mucho provecho. El principal: hará por ti en décimas de segundo operaciones largas y complicadas, que a ti te llevarían tiempo y tiempo.

Además: no se equivoca, salvo que estemos con la «batería baja».

Entrénate a «entrar» y «salir» de la calculadora, hasta que lo hagas sin titubear: **cor-o, c y cor-z.**

Advertencia

Antes de entrar en «Calculadora», conviene fijar unos «parámetros de voz» que nos ayuden a «no equivocarnos». Aunque todos los errores se pueden corregir, más vale «ir sobre seguro» y no perder tiempo.

Se recogen en la ficha n° 4, así como el procedimiento para cambiarlos automáticamente.

De momento, esto es tarea del profesor-instructor. A partir de la mencionada ficha n° 4, podrás -y deberás- hacerlo por ti mismo.

Cuando hayas adquirido destreza, serán innecesarios, aunque sigan siendo útiles y aun convenientes. Que te los prepare tu profesor o profesora (instructor o instructora de tiflotecnología y braille) o adelántate a la Unidad 4.

2. Escritura de cifras

Te advertí que a la calculadora del Braille Hablado hay que «hablarle en un lenguaje algo especial»...

Por eso, si escribimos los números como con la máquina Perkins, con el «signo de número» (⠼, puntos 3456), y realizamos cualquier operación, respondería eso de: «Error: error de sintaxis»...

Las cifras se escriben como se indica en la tabla siguiente.

Escritura en papel			Calculadora del B. H.		Lectura
Tinta	Braille Notación	Códigos	Pulsación	Teclas	
1	⠼⠁	3456,1	⠡	16	Uno
2	⠼⠃	3456,12	⠣	126	Dos
3	⠼⠉	3456,14	⠩	146	Tres
4	⠼⠙	3456,145	⠹	1456	Cuatro
5	⠼⠑	3456,15	⠱	156	Cinco
6	⠼⠋	3456,124	⠫	1246	Seis
7	⠼⠛	3456,1245	⠻	12456	Siete
8	⠼⠓	3456,125	⠳	1256	Ocho
9	⠼⠊	3456,24	⠪	246	Nueve
0	⠼⠚	3456,245	⠺	346	Cero

Escríbelas tú, y comprueba si la respuesta es correcta.

Son signos del llamado «Braille Computerizado», que es el que utilizan tanto la calculadora del Braille Hablado como los ordenadores.

Si te fijas bien, las cifras en la calculadora se escriben siguiendo unas ciertas leyes:

—No se necesita el «signo de número» (⠼, puntos 3456). Por lo tanto, basta una pulsación para cada cifra.

—Salvo el «0», todas las cifras se forman añadiendo el «punto 6» a las nueve primeras letras del abecedario. Es como si el «punto 6» hiciera las veces del «signo de número» en papel.

—El «0» tiene un signo especial: ⠾, la «o acentuada» del papel. Pero aquí no hay peligro de confundirlas.

Es muy importante que alcances velocidad y seguridad al escribir números: cuando lo consigas, ahorrarás tiempo y equivocaciones. Así pues, practica, practica, dejando que el Braille Hablado diga qué cifra acabas de introducir. Por ejemplo:

a) Escribe por lo menos cuatro veces la serie 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

b) Escribe ahora otras cuatro veces (por lo menos) la serie: 9, 8, 7, 6... 2, 1,0.

c) Escribe la serie de grupos en los que cada cifra se repite tres veces: 111222333...999000.

d) ¿Cuál es la cifra en que más te equivocas?... Escríbela diez veces seguidas.

3. *Igual a ejecutar: «Cor-e»*

Ya sabes escribir cifras. Ahora vamos a escribir «números». ¿Conoces la diferencia, no?:

—Una «cifra» es, de por sí, un «número»: 1, 3, 0...

—Los «números» se pueden escribir con «cifras»: 12,20,123.

—En un «número», cada «cifra», además de su «valor absoluto», tiene un «valor relativo», dependiendo del lugar que ocupe: unidades, decenas, centenas, unidades de millar... millones...

Pero esto es cosa de la clase de Matemáticas. Aquí lo que nos importa es cómo introducir un «número» en la calculadora tenga una o varias cifras. Cómo decírselo para que opere con él.

Hay un «comando» que podríamos llamar «Fijar»:

cor-e (15)

Haz la prueba: introduce las cifras 1 y 2, pulsa después **«cor-e»,** y... ¿qué dice?

Si ahora escribes un «5», y pulsas de nuevo «cor-e», oirás... ¿Qué significa? Es decir: el «5» corresponde a «un nuevo número». Si quisieras escribir «125», deberías escribir sus cifras seguidas, antes de «fijarlo», de pulsar **cor-e.**

Mientras no pulsamos **cor-e,** la calculadora no sabe si hemos terminado o no de escribir el número: está «a la espera».

Es como si fuéramos dictando un número cifra a cifra, y **cor-e** fuese algo así como «léeme lo que te he dicho».. O: «¿igual a...?»

En la calculadora, **cor-e** hace las veces del signo **=.**

Como verás más adelante, también equivale a mandar «hazme esta operación que te he dictado».

Por eso también se le llama «Ejecutar». Esto te puede servir para recordarlo:

«e» de «ejecutar».

Entrénate, escribiendo los números siguientes, haciendo que los «lea» la calculadora con **cor-e:**

a) 25, 19,40,78,36.

b) 100, 999, 543, 402, 028.

c) 1492, 3.056, 11.500, 100.000, 3.000.000

¡Qué!: ¿hace falta el «punto de separación de órdenes»?... Pues... ¡atención!

Observación

Hay otra orden o comando equivalente a **cor-e:**

Pulsación	Respuesta
cor-46	Nuevo renglón

Las mismas funciones, el mismo uso. Todo igual: **cor-e = cor-46.**

En la calculadora, **cor-e** viene a tener la misma función que en un archivo ordinario, cuando estamos «insertando» **(cor-i)** o «buscando» **(cor-f):** damos por finalizada la operación de «introducir la cadena de caracteres».

Por ello es preferible -al menos con principiantes- usar exclusivamente **cor-e,** dejando **cor-46** como «función u orden redundante».

Advertencias

Ni el «punto» (3) ni el «espacio» tienen sentido en la calculadora al escribir números. Si se antepone, intercala o postpone uno de ellos con las cifras de un número, la respuesta inexorable será:

error: error de sintaxis

El «punto» nunca tendrá sentido en la calculadora. El «espacio» servirá en la «calculadora científica» para separar argumentos en funciones multivariables.

4. Parámetros de voz más adecuados. Selección rápida: «cor-y, n»

En el «Braille Hablado» podemos cambiar algunas cosas de la «forma de trabajar». En concreto: lo que nos dirá cuando escribimos o cuando leemos. Se fija mediante los llamados «Parámetros de Voz».

Lo normal -y, sobre todo, al principio- es muy posible que nuestra forma de trabajar con la calculadora del «Braille Hablado» deba ser diferente de aquélla que utilizamos en un archivo ordinario.

Para ello, existe un comando que nos permite cambiar estos **«Parámetros de Voz»: cor-345.** Al pulsarlo, podemos elegir los que más te convengan o agraden. Éstos son los que más te interesarán a la hora de trabajar en la calculadora:

—*Teclado hablado* (recomendado), ***sonoro*** o ***silencioso.*** Se cambian pulsando la tecla de **espacio.**

—*Velocidad de lectura.* Más rápido: punto **«5»; más lento:** punto **«2».**

—*Puntuación.* Alguna (recomendada): **«s»; la mayor parte: «m»; ninguna: «z»; toda: «t».**

Existen otros, pero poco nos importan aquí. Si no los conoces, míralos en la «Ayuda», experiméntalos por tu cuenta o pregúntaselos a quien sepa (tu instructor de tiflotecnología y braille, por ejemplo). Hay uno que sí es muy útil: de ése se hablará más abajo.

Cuando hayas terminado, pulsas **cor-e, cor-z** o **cor-46,** y vuelves a estar donde estabas.

No se pueden cambiar los «Parámetros de Voz» una vez que hayas entrado en «calculadora». Tendrías que salir y volver a entrar.

Selección de juego de parámetros de voz

Por lo general, utilizamos «Parámetros de Voz» distintos cuando estamos escribiendo o leyendo en un archivo de texto ordinario y cuando empleamos la calculadora. Esto supone tener que andar cambiándolos cada vez que entremos y salgamos.

Pero hay un procedimiento para fijar unos y otros de una vez y cambiarlos rápida y cómodamente: el comando **cor-y** seguido de un número (en «Braille computerizado»; ya sabes: los que llevan el "punto 6").

En los «Parámetros de Voz» hay uno (el que te decía antes que era muy útil): **cor-56** o **cor-23.** Con él vas cambiando, subiendo o bajando: «Voz número 1», «Voz número 2»... «Voz número 5».

Por ejemplo: estás en un archivo con unos ciertos «parámetros de voz» a tu gusto, que supondremos son la «Voz número 1»; vas a entrar en la calculadora, donde prefieres otros distintos, que designaremos por «Voz número 2». Actuaríamos así (hazlo ahora):

Operación	**Pulsación**	Respuesta
Entrar en el «menú de parámetros de voz»	**cor-345**	Parámetros de voz
Pasar a la «voz n° 2»	**cor-56**	Voz número 2
Seleccionar parámetros convenientes para trabajar en la calculadora	**...**	...
Salir del «menú de parámetros de voz»	**cor-e**	Salida

Entras en calculadora **(cor-o, c);** haces lo que te parezca... y terminas **(cor-z).**

Has vuelto al archivo donde estabas, pero no te agradan los «Parámetros que recién has utilizado»... ¿Cómo cambiar a los «anteriores»?...; muy sencillo, como correspondían a la «Voz número 1»:

Operación	**Pulsación**	Respuesta
Comando de selección de juego de voz	**cor-y**	Voz
Juego de parámetros de voz	(16.....156)	Voz número... (1,... 5)

Y si queremos volver a entrar en la calculadora: **cor-y, 2 (126)**

De golpe, a la vez que dice «Voz número 2», estás de nuevo preparado. De esta forma, puedes tener hasta cinco voces diferentes, cambiando «intensidad» (más o menos «fuerte»), «tono» (más agudo o más grave), «timbre», «velocidad», «cantidad de puntuación leída», «modo de teclado»...

5. ***Lectura de números: dígito a dígito o «como palabras»: «cor-f»***

Escribe -en la calculadora, claro- los números «63» y «73». Después: «162» y «172»...

¿Los diferencias bien? ¿Tienes buen oído?

Hay personas a quienes les cuesta un poco: confunden los sonidos del «sesenta» y del «setenta». A mí me ocurre.

¿Qué hacemos cuando no entendemos bien una palabra?... Decimos que «nos la deletreen», ¿no?

Incluso en un archivo ordinario del Braille Hablado: cuando no entendemos bien una palabra, pulsamos dos veces **cor-25,** y nos la deletrea, obediente. O podemos recorrerla con **cor-6 y cor-3,** pero es una lata.

Pues la calculadora también «deletrea números». Pero no con **cor-25:** no responde. Es preciso «cambiar el modo de lectura»; y eso se hace con

Cor-f (124)

El aviso del Braille Hablado será:

Números dígito a dígito

o:

Números como palabras

Compruébalo:

Operación	**Pulsación**	Respuesta
Escribir un número cualquiera: 125	**125**	Uno dos cinco
Fijarlo	**cor-e**	Ciento veinticinco
Cambiar el «modo de lectura»	**cor-f**	Números dígito a dígito
Volver a leer el número	**cor-e**	Uno-dos-cinco
Cambiar el «modo de lectura»	**cor-f**	Números como palabras
Volver a leer el número	**cor-e**	Ciento veinticinco

Es decir: con **cor-f** se cambia la forma de «leer los números».

De ordinario, se trabaja en el modo «Números como palabras», y se acude a **cor-f** cuando hay duda. Pero tú funciona como mejor te parezca.

El modo «Números como palabras» tiene la ventaja de que «lee correctamente los números». Cosa que les cuesta a algunas personas, sobre todo cuando «hay ceros en medio».

6. *Borrar todo: «cor-356»*

Cuando entramos en la calculadora del Braille Hablado, podemos comprobar si hay alguna cantidad «en pantalla», esperando a ser operada. Para saberlo, pulsamos **cor-e.**

(Siempre hay respuesta. Por lo menos, oiremos: «cero».)

¿De dónde habrá salido esa cantidad?

Pues de la última vez que estuvimos operando.

Basta empezar a introducir datos, para que la calculadora se olvide de lo anterior.

Esto ocurre siempre: un nuevo número, una sola cifra, bastan para hacer desaparecer lo que había antes, y que fue «fijado» con **cor-e:** lo «borran».

Hay otra forma de «borrar la pantalla», o «ponerla a 0», una orden propia de la calculadora:

cor-356

Púlsala... Oirás:

puesta a cero

Y, en efecto, si quieres comprobarlo, pulsa **cor-e...** Dirá:

cero

Como te he dicho, basta empezar a escribir cifras para que «se borre el resultado anterior».

Pero mi consejo es que, antes de escribir un nuevo número o una expresión, pulses **cor-356.** Para evitar que pudiera haberse pulsado involuntariamente alguna tecla, o que quedara almacenada alguna cantidad distinta de «0» que, con nuestras cifras o signos diera resultados diferentes a los buscados.

Advertencia

¡Atención!

La pulsación **cor-356,** en un archivo ordinario de texto, resulta ser un comando:

cor-356

que, en cuanto nos descuidamos, hace responder al Braille Hablado:

pulsación errónea

con una voz lenta, gangosa y desagradable.

La situación sólo se resuelve apagando el aparato y volviendo a encenderlo.

7. ¿Qué llevo escrito?...: «cor-c»

Cuando estás escribiendo en la máquina un número de varias cifras, puede ocurrir que te interrumpa alguien, se te pare una mosca en la nariz y tengas que espantarla, o qué sé yo, y te detengas a medias, sin saber muy bien dónde.

Para terminar de escribir ese número, tendrás que saber qué llevas escrito, ¿no? Entonces, lees en el papel, y se acabó: a continuar. Pues eso mismo nos puede ocurrir al escribir en la calculadora: no tengo muy claro qué llevo escrito, y quiero saberlo. Pero: ¡aquí no hay papel que valga!...

No hay papel, pero hay «pantalla», aunque no se vea. No se ve, pero puedes pedir que te lo diga: *«¿qué llevo escrito?...»*

Para ello, basta que pulses la orden:

cor-c (14)

Algo así como *«¡cuéntame!»;* **cor-c:** *«¡cuéntame!» o «¡canta!»*

La respuesta será conforme con el «modo» que utilices:

números como palabras

números dígito a dígito

Por ejemplo (vete haciéndolo tú también en tu calculadora):

Borrar lo que pudiera haber en «pantalla»	**cor-356**	Puesta a cero
Empezar a escribir un número	**3 5 1**	Tres, cinco, uno
*Sin dar **cor-e** para fijarlo, pulsar la nueva orden «¡cuéntame!»*	**cor-c** (puntos 1 y 4, con **espacio)**	Trescientos cincuenta y uno (o tres, cinco, uno; según *modo de lectura de números)*
Seguir escribiendo el número	**2 5**	Dos cinco
Fijar y leer el número escrito	**cor-e**	...

¿Qué te ha dicho?... «35.125», o «3, 5, 1, 2, 5».

Si dice algo diferente, es que te has equivocado al pulsar las últimas dos cifras («2» y «5»), y tendrás que rectificar; una de ellas, las dos o todo el número; lo que prefieras o haga falta. Recuerda:

Mientras no pulses **cor-e,** estás a tiempo de rectificar de la forma que verás enseguida.

Advertencia

Cuidado al pulsar **cor-c:** si sólo pulsas «**c**», no dirá nada, y puede que si luego pulsas **cor-e,** te diga «Error: error de sintaxis», o un resultado extraño (tomó la «**c**» como «valor de lo que hay guardado en la memoria c», y ¡a saber!)

Este comando **cor-c** es muy útil, sobre todo cuando tienes que escribir números largos. Haz la prueba; empieza a escribir algunos números, y párate a medias para saber si has terminado, te falta algo o te has confundido:

1.000, 55.555, 1.000.000

Cuando empieces a trabajar con expresiones que contengan signos de operaciones, comas, letras (memorias), paréntesis, etc., también **cor-c** te los «cantará»:

30+71, 7,5-4,75, a-b+4, 33+(5-2)

(Te los pongo aquí como ejemplos, no para que los hagas.)

8. Borrar el último signo o cifra: «cor-b»

Imagínate ahora que estás escribiendo un número.

Prueba:

1 2 3 4

Y te has equivocado, o tienes duda si has pulsado un «4», un «5» u otro «3»...

Has visto en la ficha anterior la forma de asegurarte de «qué llevas escrito» con **cor-c.** Leerás la «línea de pantalla», «de izquierda a derecha», tal como has ido introduciendo datos.

¿Cómo «cambiar esa última cifra», errónea o dudosa?

Pues igual que hacemos en el Braille Hablado, cuando estamos en un archivo ordinario:[2]

cor-b(12)

Con esta orden se «borra la última cifra (o signo)» de lo que estábamos escribiendo, y, de paso -para recordártelo-, dice la última útil». En nuestro caso:

tres

Es decir: que, hasta ahora, llevas «escrito» «**1**», «**2**», «**3**». Sigue.

Si pulsas el deseado «**4**», ya sin error ni duda, termina con **cor-e,** y oyes:

mil doscientos treinta y cuatro

Correcto.

Advertencia

El comando u orden **cor-b** sólo surte efecto «mientras se está escribiendo una expresión».

Si, estando en calculadora, tras un **cor-e** que provocó la respuesta:

mil doscientos treinta y cuatro

[2] Se supone que, en los primeros niveles, se trabaja en los archivos de texto del Braille Hablado en el *«Modo agregar».*

se pulsa **cor-b,** no hay respuesta ni efecto: de nuevo con **cor-e,** vuelve a oírse:

mil doscientos treinta y cuatro

9. Sumar

Hasta aquí, poco de provecho: cómo escribir números en la calculadora, cómo borrarlos, corregir la última cifra mientras los escribes, asegurarte de qué cifras llevas escritas... Pero de «calculadora», de «calcular», nada.

¡Se acabó!: ¡a hacer trabajar a nuestra calculadora!

Vamos con las operaciones entre números.

La primera operación que ensayaremos será la misma que aprendiste tú: la suma.

A la calculadora hay que darle las cosas tal como se escriben, en el mismo orden: primer sumando, signo de sumar y segundo sumando.

Tomemos un ejemplo, que es la manera más fácil de explicarse y de entenderlo. La calculadora utiliza el mismo signo que empleamos en el Braille escrito en papel:«+»(puntos 235).

35+13

Si quieres, asegúrate de que está bien escrito; con

cor-c	treinta y cinco signo de sumar trece

Ya sabes el resultado, calculándolo mentalmente...

Compruébalo, ordenando a la calculadora que realice esa suma, mediante **cor-e** («ejecutar»):

cor-e (15)	cuarenta y ocho

¿Estáis de acuerdo, ella y tú, tú y ella?

Es tan fácil, tan fácil, que no merecería la pena ni usar la calculadora; además, te puedes confundir al pulsar las teclas (es muy frecuente). Incluso se tarda menos con cálculo mental. Al empezar, conviene ponerse ejemplos así de fáciles, para comprobar que las cosas funcionan bien.

Pero..., ¿y si tuvieras que sumar?...:

49+12+27+8+21

¡Ahora no te atreves a hacerlo mentalmente!, ¿eh? Pues, ¡que lo haga la

calculadora!. Pulsando **cor-e:**

49+12+27+8+21 Cor-e	ciento diecisiete

La calculadora es capaz de hacer sumas enormes, de muchísimos sumandos de gran tamaño, sin inmutarse ni equivocarse. Para eso se inventó. Claro que puede hacer otras muchas cosas...

Entrénate:

a) 11+22+33

b) 12+34+56+78

c) 110+423 (para esto, tampoco deberíamos usar la calculadora...)

d) 1.234+5.678

¡Atención!: ¡cuidado con los «puntos de separación de órdenes» y los «espacios en blanco»! Dan «Error: error de sintaxis»... (Te puse una trampa, ¿eh?)

Advertencia

No me cansaré de avisar del riesgo en *errores de pulsación.*

Algunos los denunciará la calculadora con su famoso «Error: error de sintaxis»; en cuanto cambiemos una cifra por una letra, por ejemplo (aunque no siempre, si se trata de números de una sola cifra).

Otros, por el contrario, permiten «operar correctamente», pero hemos cometido nosotros la equivocación al introducir mal los datos. Por ejemplo: ¿es correcto?

1234+5678=6911

¡No es posible!: si sumo dos cantidades, una terminada en «4» y la otra en «8», el resultado debería tener un «**2**» en la cifra de las unidades; no ese «**1**»...

El error consistió en que, al introducir el segundo sumando, en vez de **«5678»,** pulsamos **«5677».**

O bien:

2345+6789=6134

Por la derecha, en la cifra de las unidades, estamos de acuerdo: «**5+9=...4**».

Pero... por la izquierda: ¿»**2...+6...=6...**»? ¡Imposible!: el resultado debería ser, por lo menos, «**8**...» o «**9**...»; no «**6**...»

El error, de nuevo fue de pulsación: para las unidades de millar del segundo sumando, debimos poner un «**3**» sin darnos cuenta; **«2345+3789»,** que sí da como resultado **«6134».**

Hay más métodos de «controlar a la calculadora». O, mejor: de «controlarnos a nosotros mismos».

La confianza, las prisas, el no comprobar, un pequeño error de pulsación y... ¡todo al garete!

10. Restar

La «resta» es otra de las operaciones que puede realizar nuestra calculadora. Que, como sabes, también se le llama «sustracción» o «diferencia».

Como ocurría para la suma o «adición», el signo empleado por la calculadora es el mismo que en Braille escrito:«-» (puntos 36).

45-14

Aunque al escribir en papel se deje a veces un «espacio en blanco» a cada lado del «signo menos», ¡en la calculadora, jamás!; que daría «error de sintaxis».

Si en los «Parámetros de Voz» se tiene seleccionado «Teclado Hablado», al introducir el signo«**-**»de restar, habrás oído:

cuatro cinco menos uno cuatro

Sin embargo, si antes de pulsar **cor-e** para hallar el resultado quieres saber si has introducido bien los datos, y pulsas para ello **cor-c,** oyes (suponiendo que estés en «Leer números como palabras»):

cuarenta y cinco guión catorce

Por lo tanto: prepárate para entender que, en la calculadora, es lo mismo «menos» que «guión». El signo es idéntico (puntos 36), y eso basta.

Es más: supongamos que te has equivocado, y pusiste **«45-24».** Para rectificar el «**2**», puedes pulsar dos veces **cor-b** («borrar la última cifra»), irás oyendo:

cor-b	dos
cor-b	guión

Y ya podrías escribir el «**14**» que completa la expresión correcta. Pero observa que también aquí, la calculadora «lee» «guión» en vez de «menos».

No le des más importancia: «menos» y «guión», da igual.

¡Anda!: efectúa la resta de una vez, pulsando la orden de «ejecutar», **cor-e:**

cor-e	treinta y uno

¿Estás de acuerdo, por tu cálculo mental? Pues realiza estas operaciones:

a) 385-172

b) 1492-47

c) 2.244-1.921

d) 34.567-9.876

Advertencia

¿Qué pasaría si el «sustraendo» fuera mayor que el «minuendo»? Por ejemplo:

3-5

Es imposible, ¿no?... Veámoslo. Dile a la calculadora que realice la operación, y...

cor-e	menos dos

¡Sí puede!: ¡la calculadora puede realizar «restas que a nosotros nos parecen imposibles»!...

¿Se habrá vuelto loca?

No: es que ella trabaja con todo tipo de números, no sólo con «números naturales», como veníamos haciendo hasta ahora.

Y tú también:

Si estás en el tercer piso (3), y «bajas» cinco pisos (-5), ¿a dónde llegas?...

Pues al segundo sótano, al piso **«-2».**

O: si estamos a 3°C y la temperatura «baja» cinco grados centígrados, ¿a cuánto estaremos?...

O: si tengo 3 euros y debo pagar una deuda de 5 euros (-5 euros), ¿en qué condiciones quedo?...

Te recuerdo:

Los «números enteros» son semejantes a los «naturales» (resultado de contar), pero «llevan signo **+** o **-**».

A los «números enteros» que llevan signo «**+**» se les llama «positivos»; de ordinario, no se les pone el signo «+», y se confunden (o identifican) con los «números naturales».

A los que llevan signo «-» se les llama «negativos».

Y, ¡bueno!: está el «**0**», que es «nulo», ni «positivo» ni «negativo».

Los «números enteros positivos» se introducen en la calculadora exactamente igual que los «naturales». Si se les antepone el signo «**+**», no siempre es indiferente (véase más adelante, para la multiplicación).

Los «enteros, negativos» deben ir precedidos inmediatamente del signo«**-**».

Observación

Volviendo a la diferente lectura de «-» como «menos» y «guión»:

—Tanto al introducir valores y signos como al leer resultados, se «leen» desde «el punto de vista» de la calculadora, dice «menos».

—La «línea de edición» de la calculadora se rije por las normas de lectura de un «archivo ordinario de texto»; diciendo «guión».

El «dueño de la casa» (el Braille Hablado) no distingue entre Matemáticas y Lengua...

11. Operaciones «en cadena»

Al tratar de la suma, podíamos hacer sumas de tantos sumandos como quisiéramos... Pues bien: también podemos hacer «sumas y restas encadenadas», con tantos términos como sean necesarios:

10-11+12-13+14-15+16

Fíjate de qué manera podemos escribir esa expresión:

10+-11+12+-13+14+-15+16

El resultado es el mismo:

Trece

Es lo que suele llamarse «suma algebraica», en lugar de «sumas y restas encadenadas». ¿Por qué sólo «suma»? Porque si los signos«-»fueran «propios de los números a los que preceden, éstos serían «números negativos», y estaríamos sumando «números positivos» (los que no llevan signo, que es como si llevaran el signo «+») y «números negativos» (los que llevan signo «-»).

Para hablar de «suma algebraica» no hacen falta muchos «sumandos», basta con dos:

9+-7	dos

Es decir: tanto da poner «**9-7**» como «**9+-7**». Al escribir, ocurre lo mismo.

Pero ¡cuidado!: ¿sabes qué sucede si repites el signo «**+**» o el signo«**-**»?... ¿O, si en lugar de poner «**9+-7**» pusieras «**9-+7**»?... Experimenta...

9+-7 cor-e	dos
9-+7 cor-e	error: error de sintaxis
9++7 cor-e	error: error de sintaxis
9--7 cor-e	dieciséis

Curioso esto último, ¿no?: restar un número negativo equivale a sumarle el correspondiente positivo. Es «como si te quitaran una deuda»...

Podrías empezar por el número negativo:

-7+9 cor-e	dos

Es decir: «no importa el orden». Si acordamos que el signo «-» va pegado al número que le sigue, podemos decir que:

La suma algebraica tiene la propiedad conmutativa.

Cosa que es verdad también para la «suma normal» (de números naturales), pero no para la «resta». Por eso a los *«números con signo incorporado»* se les da un nombre especial: *«números enteros»;* frente a los *«números naturales»* (sin signo), que resultan al «contar elementos».

12. Multiplicar

Sigamos con las operaciones: vamos a ver ahora cómo se «multiplican números» con la calculadora.

Para la calculadora del Braille Hablado, el «signo de multiplicar» se pulsa de forma diferente a como se escribe en Braille: con el signo "*****" (puntos 256). Por ejemplo, si queremos multiplicar "**9**" por "**7**", pulsaríamos:

9*7

Si estamos con «Teclado hablado», al introducir la expresión habrás ido escuchando:

Nueve por siete

Sin embargo, si quieres comprobarlo con **cor-c,** oirás:

cor-c	nueve asterisco siete

lo mismo que oirías al escribir o leer esa expresión en un «archivo de texto» con «Transcriptor de Braille, no».

Está bien: pulsemos **cor-e** («igual» o «ejecutar») para obtener el resultado:

cor-e	sesenta y tres

Recuérdalo:

En la calculadora del Braille Hablado, el signo de multiplicar se escribe «*» (256)

Es el único «signo de multiplicar» que «entiende la calculadora». En papel, como sabes, pueden usarse «⠦» o «⠔».

Un poco de práctica no viene mal. Pero antes de pulsar **cor-e** para obtener el resultado, intenta efectuar los cálculos mentalmente, o, por lo menos, «controla» después si están bien o te equivocaste al pulsar los signos:

a) 8*12, 12*8, 45*100, 200*31

b) 1.234*6.789

c) Efectúa la cadena de órdenes siguiente, sin borrar los resultados parciales: **1.000*1.000 cor-e *1.000 cor-e *1.000 cor-e *1000**

Perdona esta última broma, pero así tendremos dos observaciones interesantes. Una, te la aclaro ahora; la otra, más adelante, bastante más adelante.

Observación

Lectura de cantidades grandes ¡Atención!:

El Braille Hablado no lee *«billones»:* los confunde con *«mil millones».*

Tampoco *«trillones»,* ni *«cuatrillones»...*

Efectúa correctamente las operaciones y conserva los resultados, pero «no sabe leerlos bien».

Advertencias

—Como ocurría con el signo «**+**» de sumar, la repetición del signo «*****» de multiplicar da lugar a «error».

—Un «espacio en blanco» precediendo al signo de multiplicar anula cuanto se escribe a partir de aquél: sólo se estima lo anterior.

—Un «espacio en blanco» a continuación del signo de multiplicar origina «error».

13. ¿Por qué operación empiezo?... Jerarquía de las operaciones aritméticas (I)

Ya tenemos tres operaciones con sus correspondientes signos en la calculadora: suma «**+**», resta «**-**», multiplicación «*****». Un par de fichas atrás, veíamos que «suma» y «resta» eran, a fin de cuentas, como una sola. Añadimos ahora la multiplicación, a ver qué ocurre.

Como de costumbre, empezamos con un ejemplo sencillísimo, del que sabemos el resultado:

2+3*4	dos signo de sumar tres por cuatro

Antes de hallar el resultado con **cor-e:** ¿qué esperas que responderá la calculadora?...

Pueden suceder dos cosas:

1ª) Que «no piense»: que actúe según se va encontrando las operaciones: empezar por hacer la suma **«2+3»,** y multiplique el resultado «**5**» por «**4**». El resultado final, entonces, debería ser «veinte».

2ª) Que «dé más importancia a la multiplicación que a la suma», y empiece por ella: «**3*4**» antes de nada; el resultado parcial «**12**», lo acaba sumando al «**2**», que esperaba pacientemente.

Comprueba cuál de estos dos caminos sigue: ejecuta **cor-e»...**

cor-e	catorce

En efecto: nuestra calculadora -y todas- «dan más importancia a la multiplicación que a la suma», realizan antes las multiplicaciones que las sumas, estén donde estén en la «cadena» o expresión que hayamos introducido.

¿Qué hacer si hubiéramos querido que operara primero **«2+3»,** antes de multiplicar por «**4**»?...

Pues operar por partes:

2+3 cor-e	cinco
***4 cor-e**	veinte

Enseguida verás que la calculadora del Braille Hablado te facilitará las cosas de otra forma. Pero lo importante está dicho: *multiplica antes de sumar.*

Fíjate que en esta última operación no fue necesario volver a introducir el resultado anterior «**5**», porque «ya estaba en pantalla», como si lo hubiéramos introducido «a mano».

Veamos ahora qué ocurre con la resta:

9-4*2	nueve menos cuatro por dos

Si efectuara primero la resta «**9-4**» (=5), y multiplicara luego por «**2**», debería responder «diez», al pulsar **cor-e.**

Pero si empezara haciendo la multiplicación «**4*2**» (=8), para sumar (¡bueno!: «restar») ese producto al «**9**», respondería: «uno».

Veamos: pulsa **cor-e...**

cor-e	uno

Como en el caso de la suma: *antes de restar, multiplica.* Y si queremos que primero reste, a operar por partes:

9-2 cor-e *4 cor-e

¡Claro!: ¿no hemos quedado que sumas y restas son prácticamente lo mismo?... («suma algebraica»).

Así pues:

Cuando introducimos en la calculadora expresiones en las que intervienen sumas, restas y multiplicaciones, primero efectúa las multiplicaciones, convirtiéndolas en simples cantidades a sumar o restar con las demás.

Es lo que se llama la «jerarquía de las operaciones»: las calculadoras (y nosotros, cuando nos dan algo escrito) no hacen las operaciones a medida que las introducimos o van apareciendo: antes de operar (cuando pulsamos **cor-e),** buscan en la expresión total a ver si hay multiplicaciones, para empezar por ellas.

Pares de signos

Con los signos «+» y «-» vimos que la calculadora del Braille Hablado sólo admite «+-»(equivalente a «-» sencillo) y «--»(equivalente a «+»); y que «++» y «-+» daban «error».

El signo «*» de multiplicar es mucho más «delicado»: junto con otro signo o consigo mismo, siempre da «error», salvo para «*-»:

23 cor-e**	error: error de sintaxis
2*+3 cor-e	error: error de sintaxis
2-*3 cor-e	error: error de sintaxis
2*-3 cor-e	menos seis

En este último caso, el resultado se rige por la *«regla de los signos»,* que habrás visto en clase o la verás pronto.

Unos cuantos ejercicios te ayudarán a coger práctica en comprobar «cuánto manda la multiplicación». Como de costumbre, intenta tú hacer previamente el cálculo mental:

a) 2+3X4-5

b) -3+4X5

c) 9+4X-2

d) 2345+31X100

e) 25X4-10

14. Paréntesis matemáticos

Para resolver el problema de pedirle a la calculadora -o a cualquiera- «que haga una suma o resta antes de multiplicar, se utilizan los «paréntesis matemáticos».

Los «paréntesis matemáticos» se escriben de forma distinta en la calculadora que en papel:

	Tinta Braille			Calculadora del B. H.	
		Not.	Códigos	Puls.	Teclas
Abre paréntesis	(		126		12356
Cierra paréntesis	)		345		23456

Nos permiten escribir de una tirada -en una única expresión- una cadena de operaciones que deseamos que la calculadora realice «cambiando el orden natural», de dar más importancia a las multiplicaciones que a las sumas y restas.

Los paréntesis matemáticos, como ya sabrás, podrían leerse: *«empieza por esto»* o *«empieza por calcular lo que nosotros tenemos encerrado».* Vienen a ser una llamada de atención, reclamando prioridad. No como los «**paréntesis literarios**», que parecen decir: *«esto, para aclarar» o* «a media voz, que no se note demasiado»...

Nos ahorramos con ellos el «partir una expresión», haciendo «cálculos parciales».

Si recuerdas de la Unidad anterior, teníamos:

2+3*4

Si queremos que la calculadora haga primero la suma «**2+3**», tendríamos que advertírselo:

(2+3)*4

Es decir: *«empieza por hacer 2+3».* Compruébalo:

(2+3)*4 cor-e	veinte

Si pusiéramos «**2+(3*4)**», y la calculadora pudiera decir lo que piensa, nos diría: *«¿me estará llamando tonta?...: ¡ya sé que debo empezar por la multiplicación!»* Y eso, si fuera educada...

En una misma expresión puede haber más de un par de paréntesis: cuantos se precisen. Pero con dos condiciones:

1ª) Todo paréntesis que se abre debe cerrarse. Y si se encuentra un paréntesis que se cierra, es porque antes otro se abrió:

2ª) Salvo que vaya al principio, delante de todo paréntesis que se abre debe haber un signo de operación u otro paréntesis que también se abre.

Esta segunda condición establece una diferencia importante con la escritura en papel. En papel, tiene sentido poner:

4(5+6)

Incluso es lo ordinario: delante de un paréntesis, si no existe signo alguno, se sobreentiende que se trata de una multiplicación, que debería verse un «signo de multiplicar». En la calculadora, en cambio, debemos ponerlo explícitamente:

4*(5+6) cor-e	cuarenta y cuatro

Advertencias

Tras *abrir paréntesis* (⁝, 12356) no puede introducirse «+», «*» ni «)». Como viene siendo habitual, sí se admite el signo menos «-»(36), así como otro de *abrir paréntesis .*

Tras *cerrar paréntesis* «)»(⁝, 23456) se admiten todos los signos de operaciones u otro de *cerrar paréntesis;* pero no *abrir paréntesis* «(« (12356): equivaldría a «multiplicación de paréntesis» en papel, que ya hemos dicho

exige en la calculadora el signo «por» «*» (256).

a) ¿Cómo se introduciría en la calculadora la expresión escrita 5(10+8)?

b) ¿Y (5+3X5-3)?

c) Escribe en papel de la forma más sencilla posible, lo que en la calculadora se introduciría como **10*(-5+7).**

d) Pasa a papel, y calcula cuánto da: **3-(11(2+5))**

15. Las memorias: «cor-s»

¿Para qué utilizamos la memoria? Para recordar algo, para que no se nos olvide, ¿no? Pues la calculadora también tiene su *memoria;* o, mejor: *memorias...*

Las «memorias» de la calculadora son una especie de *cajones* donde conserva lo que en ellos depositemos, guardándolo hasta que le pidamos que «nos lo recuerde», que «lo saque».

En cada uno de esos *cajones* o *memorias* sólo cabe «un número»; eso sí: todo lo grande que queramos.

En total, la calculadora del Braille Hablado tiene 26 «memorias»; aunque hay una un poco especial, que ya te diré. Cada una de ellas lleva una «etiqueta», por la que se le nombra o «llama» con las letras del abecedario: **a, b, c..., v, w, x, y, z** (todas, salvo la «**ñ**»).

Existe una «orden» o «comando» para guardar una cantidad en una memoria cualquiera:

Cor-s	memoria

La orden **cor-s** viene a ser algo así como: *«guárdame esto en la memoria...»*

A continuación, debes pulsar la letra correspondiente a la memoria donde quieres que te guarde la cantidad «que tienes en pantalla». Y ya está.

Por ejemplo, si queremos conservar «**10**» en la memoria «**a**» y «**25**» en «**b**», procederemos:

guardar 10 en la memoria a	**10 cor-e cor-s a**	diez memoria a correcto
guardar 25 en la memoria b	**25 cor-e cor-s b**	veinticinco memoria b correcto

En ambos casos, tras el nombre de la memoria («a» o «b»), se oye un «correcto».

¿Y cómo saber qué hay guardado en una memoria?

Simple: pulsa "su letra" y luego **cor-e:**

ver contenido de la memoria a	**a cor-e**	diez
ver contenido de la memoria b	**b cor-e**	veinticinco

Lo más interesante: puedes operar con las letras de las memorias como si fueran los números que ellas contienen:

a+b cor-e	treinta y cinco
b-a cor-e	quince
3*a+b cor-e	cincuenta y cinco
2*(a+b) cor-e	setenta

(Te recuerdo: si no has entendido bien este último resultado, pulsa **cor-f,** para que deletree; al pulsar de nuevo **cor-e,** dirá: «siete, cero».)

Cuando guardamos un número en una memoria, se machaca lo que en ella había. Siempre hay algo: cuanto menos «0».

Las «memorias» conservan números o resultados de operaciones, no expresiones.

Aunque apagues el Braille Hablado, las memorias de la calculadora conservan sus valores. Si lo deseas, pueden servirte como agenda para llevar la contabilidad, clasificaciones deportivas o cosas por el estilo.

Ejercítate:

a) Guarda 5.555 en la memoria «**s**» y 6.666 en la «**t**», y calcula **6s-5t.** ¿Te da «0»?

b) Sin mirarlo previamente, halla **5+3*z...** Por el resultado que te dé, ¿podrías saber qué número está guardado en «**z**»?

c) Guarda en «**a**» el valor «**93**»; se dice que *«hacemos a=93»...* Ahora, calcula «**7*a*11**». Guarda el resultado que te dé en la memoria «**b**», y calcula «**13*b**», y guárdalo en «**c**». Tiene algo que ver este resultado de «**c**» con el número que tenías en «a»? Compruébalo. Puedes repetir el proceso con cualquier número de dos cifras.

Advertencia

Antes de pulsar **cor-s,** conviene asegurarse de «qué número se tiene en pantalla»; bien pulsando **cor-e,** bien porque se acaba de realizar una operación y el resultado está ahí. Si no, la calculadora piensa que el número que se quiere guardar es el último resultado de pantalla, ignorando cuanto hayas

escrito después, y, lo que es peor: dirá «correcto».

25 cor-e	veinticinco
4*29-1 cor-s h	correcto
h cor-e	veinticinco

Por tal motivo, y hasta que se alcance un cierto automatismo, conviene asegurarse de que se ha obrado correctamente pidiendo mostrar el contenido de la memoria en cuestión, tal como ves en este ejemplo.

Observaciones

En la memoria «r» se queda «el último resultado de pantalla». Por tanto, «cambia continuamente», resultando inútil a efectos de guardar valores.

Cuando se «inicializa el Braille Hablado» se pierden o conservan los contenidos de las memorias de su calculadora, según el tipo de inicialización que se aplique (ver «Ayuda» o «Manual»).

16. El resultado viajero

Imagínate que estás resolviendo un problema, escribiéndolo directamente en un archivo del Braille Hablado para luego imprimirlo (en Braille o en tinta). Por ejemplo:

¿Cuál es la superficie de un campo de fútbol que mide 106m de largo y 73m de ancho?

Solución- Un campo de fútbol tiene forma rectangular. Y como el área del rectángulo es base X altura o largo X ancho:

106X73=

Temo arriesgarme a hacerlo mentalmente; tampoco tengo tiempo para hacer la operación en papel o con algún artilugio de cálculo; y, para colmo, tengo la calculadora en la mano... ¡Allá voy!:

cor-o c	calculadora preparada
106*73 cor-e	siete mil setecientos treinta y ocho

No hace falta que te esfuerces en recordar el resultado: el Braille Hablado lo conserva para ti. En tres sitios:

—En la calculadora, además de la pantalla, en la memoria «r».

—¡En «papelera»!

—¡En el «archivo de insertar»!

Por los dos últimos, puedes incluirlo inmediatamente donde quieras, en el archivo y lugar que quieras. Por ejemplo, puedes situarte tras el signo «=» de la solución a tu problema y pulsar una de las dos órdenes siguientes:

Insertar desde el «fichero de inserción»	**cor-i cor-e**	modo de inserción activado, correcto
Copiar el contenido del fichero «Papelera»	**cor-346 c**	pegar: ¿de dónde?, papelera correcto

Y... ¡oh sorpresa!: allí está el resultado.

Te recomiendo el primer procedimiento, el de «insertar». Porque aunque la calculadora trabaja con signos del «Braille computerizado», en tu archivo se incluirá el resultado en Braille ordinario o computerizado, según que estés o no en «Transcriptor de Braille». Sin embargo, si recurres al método de «pegar de papelera» (empleando **cor-346, c),** siempre viene en «Braille computerizado».

Observación

Para copiar un «valor de pantalla» de la calculadora no es preciso hacer una nueva operación matemática: basta con *«leer lo que está ahí»,* con **cor-e,** y, al salir, está listo. Claro que «para ese viaje» no merecía la pena «entrar en calculadora», pero conviene que lo sepas, porque ahí lo tienes disponible para repetir ese número cuantas veces quieras y donde quieras.

Es interesante, sobre todo, si se trata de un número grande o extraño, difícil de recordar.

Advertencia

Conviene realizar esta operación inmediatamente después de haber salido de la calculadora. Si se «inserta» o «borra» cualquier cosa en el archivo, cuando se «llama al valor de pantalla de la calculadora», el Braille Hablado recupera lo que contenga en ese momento la «papelera» (la cadena recién «insertada» o «borrada»).

17. Dividir

La cuarta operación aritmética: «dividir». Su signo en la calculadora del Braille Hablado es «/»(í, 34).

Es diferente al signo utilizado al escribir en papel; como ocurría con el signo de multiplicar y los paréntesis.

Siguiendo la costumbre, probemos con un ejemplo sencillo, fácil de controlar:

48/6

Si se trabaja con «Teclado hablado», al introducir la expresión se oirá:

cuatro ocho dividido seis

Pero si comprobamos con **cor-c,** se oye:

Cor-c	cuarenta y ocho barra seis

Lo mismo que oirías al escribir o leer esa expresión en un «archivo de texto» con «Transcriptor de Braille, no».

Para obtener el resultado, pulsemos **cor-e** («igual» o «ejecutar»):

Cor-e	ocho

Recuérdalo:

En la calculadora del Braille Hablado, el signo de dividir se escribe«/»(34)

Es el único «signo de dividir» que «entiende la calculadora».

En papel, por si no lo sabes, además de ⠸ (puntos 256), también pueden usarse ⠩ (puntos 25) o ⠌ (puntos 6, 2). Aunque en Braille se recomienda utilizar únicamente el primero o, simplemente, en forma de «fracción» (todo llegará...)

Entrénate a emplear el «signo de dividir». Antes de pulsar **cor-e** para obtener el resultado, intenta efectuar los cálculos mentalmente o, por lo menos, «controla» después si están bien o te equivocaste al pulsar los signos:

a) 42/7, 42/3, 84/12

b) 408/2, 612/3, 520/4

c) 8.256/6, 5.670/315, 1.000.000/1.000 (¡ojo con los puntos de separación!)

Advertencias

—Como ocurría con los signos «+» de sumar y «*» de multiplicar, la repetición del signo «/» de dividir da lugar a «error».

—Un «espacio en blanco» precediendo al signo de dividir anula cuanto se escribe a partir de aquél: sólo se estima lo anterior.

—Cualquier signo de operación antes del de dividir da lugar a «error».

—Un «espacio en blanco» o los signos «+» o «*» a continuación del signo de dividir origina «error». No así el signo menos «-», que influirá en el signo del resultado.

18. Números con coma

Habrás visto en clase que las fracciones que en el denominador tienen 10,100,1000... (potencias de 10) se pueden escribir de forma especial: como *«números con coma»:*

5/10=0,5, 25/100=0,25, 800/1000=0,800.

En la calculadora podemos hacer dos cosas:

—Escribir el «número con coma» directamente, empleando la «coma»«,»(, 2) o

—Introducir los términos de la fracción o división (o cociente, que es lo mismo), y decirle que haga la operación.

0,5	**5/10 cor-e**	cero coma cinco
0,25	**25/100 cor-e**	cero coma dos cinco
0,800	**800/1000 cor-e**	cero coma ocho

Fíjate en dos cosas:

1ª) La calculadora desprecia los ceros a la derecha de la coma, si no sigue ninguna cifra «significativa».

Es decir: como al escribir, tanto da decir 0'800 como 0'80 o 0,8; 1,5 como 1,50 o 1,5000.

¿Por qué? Porque:

0,800 = 800/1000 = 8/10 = 0,8; 0,80 = 80/100 = 8/10 = 0,8

1,5 = 15/10 = 150/100 = 1,50;1,5 = 15/10=1500/1000= = 1,500

2ª) La calculadora del Braille Hablado lee una a una las cifras después de la coma. Que es tanto como decir que «no sabe leer decimales». Lo correcto sería:

escritura en calculadora	lectura por calculadora B.H.	lectura correcta
0,8	cero coma ocho	ocho décimas
1,25	uno coma dos cinco	una unidad con veinticinco centésimas
1,125	uno coma uno dos cinco	uno con ciento veinticinco milésimas

Ayudándote de la calculadora (introduciéndolo primero en ella), escribe en papel:

a) «sesenta y cinco centésimas»

b) «sesenta y cinco décimas»

c) «sesenta y cinco milésimas»

d) «tres décimas y cinco milésimas».

Observaciones

1ª) Si se omite la «parte entera», la calculadora entiende que es «**0**»:

,3 cor-e	cero coma tres
5+,25 cor-e	cinco coma dos cinco

2ª) En consecuencia, delante de la coma puede introducirse un signo cualquiera de operación: la calculadora entenderá que la expresión que le sigue está encabezada por un **«0,...»:**

4+,25 = 4,25

4-,25 = 3,75

4*,25 = 1

4/,25 = 16

4*(,25+3) = 13

Pero devolverá «error» si la coma va precedida de «cierra paréntesis» u otra «coma».

19. «Modo fraccionario» y «Modo decimal»

La calculadora del «Braille Hablado» puede hacer cosas poco frecuentes, que no hace casi ninguna otra. Un ejemplo es la forma de leer cantidades fraccionarias: en «modo fraccionario» o en «modo decimal».

Introduce «1/2»:

½	uno dividido dos

Antes de realizar esa división, asegúrate pulsando **cor-c...** Deberá decirte:

cor-c	uno barra dos

Pulsa **cor-e...** Dará el cociente:

cor-e	cero coma cinco (0,5)

¿Estás de acuerdo?

Si escribiéramos estos pasos con la máquina, sería:

1/2 = 0,5

Volvamos a nuestra calculadora. Supongo que tendrás en «pantalla» el «0,5» resultado anterior... De no ser así, consíguelo como puedas: o volviendo a hacer **«1/2 cor-e»** o directamente **«0,5 cor-e»:**

0'5 cor-e	cero coma cinco

Pulsa ahora la combinación de teclas **cor-34** (teclas 3 y 4, con «espacio»). Anunciará: «Modo fraccionario»; no te extrañe.

cor-34	modo fraccionario

Al pulsar ahora **cor-e** para leer lo que hay en «pantalla», dice:

cor-e	uno dividido dos (1/2)

O sea: «1/2», sólo que en lugar de «barra» dice «dividido».

Es decir: en vez de dar el resultado del cociente, lo dice «indicado», «como fracción entera». Por eso advirtió: «MODO FRACCIONARIO».

Si vuelves a pulsar **cor-34,** oirás ahora: «modo decimal»:

cor-34	modo decimal

Y al pulsar de nuevo **cor-e:**

cor-e	cero coma cinco (0,5)

El «número» es el mismo: «0,5=1/2». Sólo cambia la forma de escribirlo o de decirlo. Ésa es la función de la orden **cor-34.**

Puedes probar con otros ejemplos:

3/4 = 0,75; 5/8 = 0,625; 2/3 = 0,67

Y, al revés: si introduces un número en forma decimal, **cor-34** lo convierte en fracción entera:

0,75 = 3/4; 0,625 = 5/8

Por ahora, trabaja sólo con «fracciones propias», de «numerador menor que el denominador». Las «impropias», déjalas para más adelante, si no quieres liarte.

¡Ah! y de términos «pequeños», cuando son grandes, tarda mucho en hacer la conversión de decimales en fracciones:

0,23 = ... «dos, tres, dividido uno, cero, cero»

Observa que los términos de la fracción los lee «dígito a dígito»; no «como palabras», aunque revises el «modo de lectura (con **cor-f).** Le ocurre como al «leer decimales»: «no sabe», y lo hace «deletreando», como los niños.

El «modo fraccionario» es un buen amigo, que ahorra tiempo. Claro que los vagos pueden aprovecharse de él, como «cómplice para no trabajar», aunque, al final, todo se descubre.

21/28 cor-e	tres dividido cuatro (3/4)

¿Qué ha ocurrido?...

Pues que la calculadora *ha simplificado* la fracción que tú has introducido, **«21/28»,** y la ha dejado en «3/4». La «simplifica», dejándola en «irreducible», pero no te dice «por cuánto ha dividido o ha ido dividiendo numerador y denominador» hasta llegar a «3/4».

Y si introdujeras **«3465/4851**», devolvería «cinco dividido siete» o «cero, siete, uno, cuatro...» (Eso sí: tras esperar bastantes segundos...)

Es una «buena amiga» para facilitar cálculos y comprobar resultados al «simplificar fracciones».

Los vagos pueden servirse de ella como «cómplice para intentar engañar a otros o engañarse a sí mismos», queriendo hacer creer que saben «simplificar fracciones, porque dan el resultado final; pero si les preguntamos «¿cómo lo has hecho?, ¿por cuánto has dividido numerador y denominador?», lo más seguro es que no respondan.

Comprueba esta propiedad tan interesante, con fracciones equivalentes que escribes primero en la máquina y después los resultados en fracción irreducible y decimal que te dé la calculadora:

6/10 = 42/70 = ...

10/80 = 5/40 = ...

Advertencia

Conviene tener cuidado con la *«precisión»,* porque «causa espejismos»:

2/3 cor-e	cero coma seis, siete (0,67)
Cor-34 0,67 cor-e	seis, siete, dividido por uno, cero, cero (67/100)

¿Cómo puede ser esto? Porque «67/100» no es igual a «2/3» (se ve enseguida que 67/100 es irreducible: 67 no es divisible por 2 ni por 5, que son los únicos

divisores de 100).

Si revisamos la «precisión», veremos que se encuentra en «2». Si la pasamos a **«3»,** (con **cor-p, 3, cor-e),** resultaría:

2/3 cor-e	cero coma seis, seis, siete (0,667)

Si intentamos hacer la operación inversa, en «modo fraccionario», tras no poca espera, acaba dando:

Cor-34 0,67 cor-e	Seis, seis, siete, dividido por uno, cero, cero, cero (667/1000)

El «7», última cifra decimal, es fruto del «redondeo». En realidad:

2/3 = 0,66666... (periódica)

Observación

El «modo fraccionario» se desactiva al salir de la calculadora: al volver a entrar, siempre se halla en «modo decimal».

20. Número de cifras decimales. Precisión

La posibilidad de usar decimales tiene, entre otras consecuencias, la de que «siempre es posible dividir números enteros». Así que nadie diga que «es imposible dividir 1 entre 16». Aún más: la división es, de alguna forma, «exacta»...

Pero fíjate lo que puede ocurrirte al dividir en la calculadora:

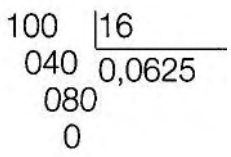
1/16 cor-e	cero coma cero seis (0,06)

Está claro que aquí falta algo... Pues si hacemos la operación inversa (divisor multiplicado por cociente), resulta:

16*0,06 cor-e	cero coma nueve seis (0,96)

No te engañaba líneas arriba cuando decía que: «usando decimales, toda división es exacta»...

Si hacemos la división en papel, resulta:



¿Por qué se detuvo la calculadora en el segundo decimal? ¿Es que sólo sabe

dividir hasta ahí?

La calculadora hará lo que nosotros le ordenemos. Por ejemplo: vamos a decirle que haga la división «hasta tres cifras decimales»...

cor-p	introducir precisión
3	tres
cor-e	correcto

Al hacer ahora nuestra división, obtenemos:

1/16 cor-e	cero coma cero seis dos (0,062)

Si deseamos «ver aparecer» el «5», deberemos alcanzarlo, obligando a mostrar hasta la 4ª cifra decimal de «precisión»:

cor-p 4 cor-e	Introducir precisión: cuatro correcto

Sin necesidad de efectuar de nuevo la división **1/16,** puesto que el resultado aún «está en pantalla»:

cor-e	cero coma cero seis dos cinco (0,0625)

Es decir: la calculadora hace siempre la «división completa»; pero *sólo nos dirá cuantos decimales de precisión le tengamos pedido* con **cor-p.**

De ordinario, suele trabajarse con «dos decimales de aproximación o precisión». Sólo cuando la necesitemos mayor se amplía con **cor-p;** si no, podría ser una murga.

Por ejemplo, si tuviéramos «precisión 12» (que es el máximo en nuestra calculadora) e hiciéramos la división 2/9, tendríamos:

2/9 cor-e	cero coma dos dos dos dos dos dos dos dos dos dos dos dos

que no nos sirve para nada, pues somos incapaces (yo, al menos; no sé tú) de contar y retener esas doce cifras decimales.. (aquí sí, porque es un «2» que se repite).

El caso es que tampoco lo que ha leído es *exactamente 2/9,* sino «una aproximación de 12 cifras decimales». Pero si multiplicamos por 9 (divisor) resultaría exactamente «2»; luego la calculadora «sí había hecho la división completa y la tenía a tu disposición». Incluso podría conservarla en una de las «memorias»:

2/9 cor-e	cero coma dos dos...
cor-s z	correcto
z*9 cor-e	dos

O si quieres, antes de efectuar este producto, al pasar a «modo fraccionario» con **cor-34,** habría dicho:

cor-34	modo fraccionario
cor-e	dos dividido nueve

Advertencias

—Al salir de calculadora con **cor-z,** se conserva la «Precisión».

—Por consiguiente, si se ha de trabajar con decimales, conviene revisar la «precisión», fijándola en un valor conocido.

—Si una expresión con decimales alcanza a dicho «valor de precisión», conviene ampliarlo -al menos momentáneamente-, en previsión de que se estén perdiendo cifras de aproximación.

21. Fracciones impropias y números «mixtos»

Escribamos una fracción «impropia», es decir: de numerador mayor que el denominador:

7/4	siete dividido cuatro

Al pulsar **cor-e,** obtenemos:

Cor-e	uno coma siete cinco (1,75)

Pasando a «modo fraccionario»:

Cor-34	modo fraccionario
Cor-e	uno más tres dividido cuatro (1 +3/4)

Era de esperar que hubiera dicho «siete dividido cuatro», que fue lo que introdujimos, ¿no? Pues no: la calculadora «simplifica», tal como hacía con las «fracciones propias reducibles» (¿recuerdas, un par de unidades atrás?). Aplica la fórmula general:

D = cXd+r
dividendo = cociente X divisor + resto

Dividiendo ambos miembros por el «divisor» «d», resulta:

D/d = c + r/d
dividendo / divisor = cociente + resto/divisor

En nuestro ejemplo:

7 = 1X4 + 3<=>7/4 = 1 +3/4

Que fue lo que dijo la calculadora.

Hay una diferencia sin importancia: al escribir una «expresión o número mixto» en papel suele omitirse el «signo de sumar»; aunque lo correcto sería ponerlo, porque es verdad:

1 3/4 = 1+3/4; 4+3/20 = 4 3/20

Esta manera de funcionar puede ser un pequeño inconveniente para los no tan pequeños holgazanes que esperan aprovecharse del «modo fraccionario» para pasar sin esfuerzo expresiones decimales a fracciones enteras. Por ejemplo:

4,15 cor-e	cuatro coma uno cinco (4,15)
cor-34	modo fraccionario
cor-e	cuatro más tres dividido dos cero (4+3/20)

Si quieren pasarlo a forma de «fracción entera», deberán trabajar un poquito:

4 + 3/20 = (4X20+3)/20 = 83/20

Y tienen suerte, porque «83/20» es «irreducible».

En realidad, lo único que ha hecho la calculadora es «simplificar la parte fracción decimal». Me explico:

4,15 = 4 + 0,15 = 4 + 15/100 = 4 + 3/20

Ni que decir tiene que si introducimos en «modo fraccionario» una «expresión mixta», la calculadora la simplifica:

3+4/8 **cor-e**	tres más uno dividido dos (3+1/2=3 1/2)

22. Potencias de exponente natural (I). Recurso a «memorias»

Una «potencia de exponente natural» es *«una forma de expresar un producto reiterado»:*

3^4 = 3X3X3X3 = 81

En la calculadora del Braille Hablado, la cuestión no tendría más problemas:

3*3*3*3 cor-e	ochenta y uno (81)

La dificultad puede surgir cuando el numero a multiplicar -la «base»- es un

número de varias cifras, enteras o decimales:

$12,35^4 = 12,35x12,35x12,35x12,35$

Entonces, es fácil equivocarse y no es fácil corregir: hay que volver a empezar...

Para remediarlo hay un procedimiento: acudir a las *«memorias»:*

Introducir 12,35	**12,35 cor-e**	doce coma tres cinco
Guardar el valor en la memoria a	**cor-s a**	memoria a correcto

La *memoria o número* «a» contiene al «**12,35**», «base de la potencia». Para obtener ésta, bastará con multiplicar la «base» por sí misma tantas veces como indica el «exponente» («4», en este ejemplo):

Efectuar el producto	**a*a*a*a cor-e**	23263,11300625

(Para mayor lujo de detalles, se ha puesto «Precisión 12»),

Evidentemente, pulsar «a» tiene menos posibilidades de error que escribir **«12,35»;** sobre todo si debemos repetirlo cuatro o más veces, como ocurre aquí.

Hay más. Si debiéramos calcular «$12,35^8$» (perdón por el capricho: es un simple ejercicio), podríamos seguir varios caminos:

a) «A pie»:

12,35*12,35*12,35*...(8 veces)...*12,35 cor-e

b) Utilizando una memoria:

12,35 cor-e cor-s a
a*a*a*...(8 veces)...*a cor-e

c) Utilizando dos memorias:

12,35 cor-e cor-s a
a*a cor-e cor-s b
b*b*b*b cor-e

d) Otra forma: utilizando también dos memorias:

12,35 cor-e cor-s a
a*a*a*a cor-e cor-s b
b*b cor-e

Estas dos últimas formas se basan en una propiedad de las potencias:

$12{,}35^8 = a^8 = a^{2X4} = (a^2)^4 = b^4$

$12'35^8 = a^8 = a^{4X2} = (a^4)^2 = b^2$

La potencia de una potencia es igual a otra potencia de igual base y exponente el producto de los exponentes.

Sólo que «leída de derecha a izquierda»...

Es indudable que se controla más fácilmente una letra repetida cuatro veces -ya sea «b», en el camino c), o «a» en d)- que al repetirla ocho veces -camino b)-.

La gracia de estos procedimientos consiste en «saber descomponer el exponente en producto de exponentes», si ello es posible.

En última instancia: como «suma de exponentes». Para $12{,}35^7$:

12,35 cor-e cor-s a
a*a*a*a cor-e cor-s b
a*a*a cor-e cor-s c
b*c cor-e

Ya que:

$a^7 = a^{4+}3 = a^4 \cdot a^3 = b.c$

O, si se quiere:

12,35 cor-e cor-s a
a*a cor-e cor-s b
b*b*b*a cor-e

Pues:

$a^7 = a^{2+2+2+1} = a^2xa^2xa^2xa = bxbxbxa$

Basado en la propiedad de las potencias:

El producto de potencias de igual base es otra potencia con la misma base y exponente la suma de los exponentes.

Como más arriba, interpretada en sentido inverso.

Practica este «método de las memorias» en los siguientes ejercicios:

a) 123.456^3

b) $0,0025^4$

c) $1,35^9$

23. Potencias de exponente natural (II). La operación «elevado a»

Para el cálculo de potencias, la calculadora del Braille Hablado cuenta con un recurso poderoso a la par que sencillo: la operación que podríamos llamar *«elevado a»,* que se obtiene pulsando el signo «^» (⠈, 45):

4^3	cuatro acento circunflejo tres
Cor-e	sesenta y cuatro (64)
3,5^2	tres coma cinco acento circunflejo dos
Cor-e	doce coma dos cinco (12,25)

Para potencias de exponente simple, equivale al signo ⠘ (puntos 16) en escritura Braille.

Sería deseable que, al pulsarlo con «Teclado hablado», la calculadora respondiera «elevado a», pero debemos conformarnos con ese *«acento circunflejo»,* que es lo mismo que el Braille Hablado lee en un fichero de texto.

Como ves, es mucho más sencillo y rápido que hacer el producto puro y duro o el recurso a «memorias» que veíamos en la unidad anterior. La posibilidad de error es prácticamente la misma que al introducir la «base», y siempre puedes comprobarlo antes de pulsar **cor-e,** leyendo la expresión con **cor-c.**

Sin embargo, tiene una forma de actuar peculiar, por lo que debe usarse con prudencia, conociendo muy bien su funcionamiento.

Advertencias

1ª) El signo «^» (45) debe introducirse precedido de la«base» y seguido del «exponente»; de otra forma, da «error».

25 cor-e	veinticinco
^2	acento circunflejo dos
cor-e	error: error de sintaxis

Algo que no ocurría con los signos de operación «+»,«-», «*» o «/».

2ª) Cuando el signo «elevado a» «^» (45) forma parte de una expresión, toma como «base de la potencia» el «resultado de las operaciones que le preceden». Es decir: es como si generara -de forma invisible- un paréntesis

que abarcara todo lo anterior a él.

1+3^2 cor-e	dieciséis 16 = $(1+3)^2$
cor-356	puesta a cero
-2^4 cor-e	dieciséis 16 = $(-2)^4$
5 cor-e	cinco
-2^3 cor-e	ochenta y uno (81 =$(5-2)^4$)

(Antes de introducir **«-2^4**» es preciso «borrar la pantalla»; de no hacerlo, resultaría: «$(16-2)^4$». Lo que no será necesario al introducir «**1**», ya que esta cifra produce el «borrado» por sí sola.

Si se quiere conseguir un efecto semejante a la representación escrita, debe acudirse a paréntesis:

1+(3^2) cor-e	diez (10)
cor-356	puesta a cero
-(2^4) cor-e	menos dieciséis (-16)

3ª) Si la expresión que le sigue es un producto o un cociente, el signo «elevado a» «**^**» (45) la interpreta como «exponente» -su resultado-, sin necesidad de encerrarla entre paréntesis (como sucedería en Braille):

2^3*3 cor-e	quinientos doce (512=2^9)
4^1/2 cor-e	dos (2= $\sqrt{4}$)

4ª) El signo «elevado a» «^» (45) debe ir precedido necesariamente de una cifra, letra -«memoria»- o «)» -«cierra paréntesis»-, nunca de «+»,«-», «*»,«/»,«,» o «(«.

Ejercítate en el uso correcto de este signo de operación en la calculadora. Cómo introducir en la calculadora de forma lo más sencilla posible las expresiones que en papel se escriben:

a) $9-2^3$ (=1)

b) $(3+2)^5$ (=25)

c) $-(3+2)^5$ (=-25)

d) 3^2+5^2 (=34)

24. Transcribir en la calculadora. Los «paréntesis auxiliares braille»

Como sabes, al escribir expresiones matemáticas en Braille es preciso acudir con frecuencia a los *«paréntesis auxiliares»:*

⠶ (puntos 26) abrir paréntesis auxiliar

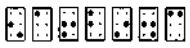
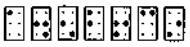
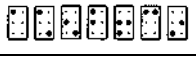
⠿ (puntos 35) cerrar paréntesis auxiliar

Aparecen encerrando numeradores o denominadores complejos, exponentes que son a su vez expresiones complejas... Se llaman «auxiliares» porque los necesita el Braille, por ser una «escritura lineal»; pero no son necesarios en tinta ya que las expresiones en ellos encerradas están suficientemente separadas o visibles gracias a su posición, arriba / abajo, menor tamaño de los caracteres, etc.

En la calculadora, las cifras y signos de operaciones también se introducen «en forma lineal» -como en Braille-, uno detrás de otro. Por ello, se parecen mucho «escribir en Braille» e «introducir expresiones en la calculadora».

Pero en la calculadora no hay «paréntesis auxiliares»: se utilizan los únicos paréntesis que tiene: «(« (⠶, 12356), «abre paréntesis»- y «)» (⠿, 23456, «cierra paréntesis»). Claro que tiene también sus peculiaridades a la hora de emplearlos (acabamos de ver qué ocurre con el signo de **«elevado a»** «»).

He aquí algunos ejemplos:

Tinta	Braille	Calculadora
$\frac{a+b}{c}$		(a+b)/c
$\frac{a}{b+c}$		a/(b+c)
$\frac{a+b}{c+d}$		(a+b)/(c+d)
A^{b+c}		a^(b+c)

Observaciones

Las «reglas» para el buen uso son las mismas que veíamos al tratar de los «paréntesis matemáticos», en la Unidad 14:

—Todo paréntesis que se abre debe cerrarse. Y si se cierra un paréntesis, es porque antes se abrió:

—Salvo que vaya al principio, delante de todo paréntesis que se abre debe haber un signo de operación (u otro paréntesis que se abre).

—Tras el signo de «abrir paréntesis»«(»(⠶, 12356) no se permiten los signos «+», «*»,«/», «^» ni«)». Sí se admite el signo menos «-»(⠤, 36).

—Tras el signo de «cerrar paréntesis» «)» (⠿, 23456) se admiten todos los

signos de operaciones; pero no «abrir paréntesis» «(« (12356): equivaldría a «multiplicación de paréntesis» en papel, que exige en la calculadora el signo «por» «*» (256).

25. Tanto por ciento

En Braille, cuando quieres expresar el «tanto por ciento» o «porcentaje» de una cantidad, escribes:

20% de 40

Y, para calcularlo, haces:

20 · 40/100

que te da «**8**».

Pues bien: en la calculadora basta poner:

20%40

y, al ejecutar con **cor-e,** devuelve el resultado «**8**».

El signo-operador«%»(%, puntos 4, 5, 6) equivale a decir:

«halla el tanto por ciento de la segunda cantidad que te indica la primera»

O, al revés:

«halla el tanto por ciento de la primera cantidad que te indica la segunda»

¿Es curioso, no?: con la operación «tanto por ciento», no importa el orden; es «conmutativa». Haz la prueba; calcula:

25% de 80	**25%80**
80% de 25	**80%25**

Deberá darte lo mismo: **«20».**

Es natural:

25% de 80 = 25·80/100

80% de 25 = 80·25/100

ya que los productos 25.80 y 80.25 son iguales, por la «propiedad conmutativa de la multiplicación».

Observaciones

Como ocurre con las demás operaciones aritméticas, no es preciso introducir las dos cantidades en la «misma línea»: se puede partir -como «primera cantidad: ya sea «porcentaje» o «total»- de aquélla que se encuentra «activa en pantalla»; porque se quiere tener fijada antes o es resultado de operaciones anteriores.

Con ella «presente» -leída» con **cor-e** cuantas veces quieras-, prosigues con «%» y la segunda cantidad.

Fíjate que, en la calculadora, nos basta el signo «%»(⠨, puntos 456) para expresar una operación que, en papel, necesita de un signo y una preposición. Además en la calculadora (y en «Braille computerizado») para el signo de «tanto por ciento» es un solo carácter, mientras que el Braille ordinario necesita dos.

Opera con la calculadora y comprueba el resultado. Antes de ejecutar la operación, intenta anticipar tú un resultado aproximado, o razona después si lo que te dice puede ser correcto; si no coincidís -aproximadamente-, repite la operación, asegurándote de no equivocarte al introducir los signos (revisando con **cor-c** antes de pulsar «cor-e»),

a) 10% de 90 = 9

b) 15% de 45 = 6,75

c) 4,5% de 80.000 = 3.600

d) 3,5% de 47.512 = 1.662,92

e) 150% de 86 = 129

¿Cómo escribirías en Braille (con la máquina), lo que en la calculadora se introduce:

f) 22%60

g) 2,5%20000

h) 125%80

Advertencia

Jerarquía entre operaciones

La operación «tanto por ciento» es el resultado de la multiplicación de las cantidades indicadas y la división por 100, ¿no? Debería ser, pues, de igual «categoría» o «rango» que la multiplicación y la división, y ejecutarse después que las potencias y raíces, al mismo tiempo -y por orden de escritura- que productos y cocientes, pero antes que las sumas y restas, salvo que hubiera

paréntesis que «mandaran otra cosa»... ¡Pues no!:

En la calculadora, la operación «tanto por ciento» tiene efectos de **«igual»** o *«calcula el porcentaje de cuanto hayamos escrito hasta aquí, según lo que indique la cantidad que viene a continuación».*

Lo que no quiere decir que no podamos seguir introduciendo datos y operaciones en la misma «línea». Pero cada vez que nuestra calculadora encuentre un signo «%», realiza operaciones -conforme a las reglas de «jerarquía»-, y sigue adelante. Compruébalo:

10%3^3	0,027	0,3^3	**(10%3)^3**
30+2%10	3,2	32% 10	**(30+2)%10**
10%20+30%40	12,8	32%40	**(2+30)%40**
10+20%30%40	3,6	9%40	**((10+20)%30)%40**

26. Raíz cuadrada

Eres capaz de calcular la potencia de cualquier número. Con ayuda de la calculadora del Braille Hablado, de varias formas; en concreto, para el cuadrado de un número n:

multiplicándolo por sí mismo, sin más	**n*n cor-e**
empleando una memoria a	**n cor-e cor-s a a*a cor-e**
empleando el signo «elevado a» «^» (45)	**n^2 cor-e**

Ahora bien, ¿y al revés?: si tienes un número, ¿cómo hallar aquél que elevado al cuadrado dé ese número?...

A tal resultado se le llama, como bien sabes, su *«raíz cuadrada»,* y se representa por «$\sqrt{n}$». En Braille: ⠩⠩⠩, con ese signo que ocupa dos celdillas (formado por los puntos 1246,156).

Para algunos números es muy sencillo, a poco Cálculo Mental que practiquemos:

$\sqrt{25}$ = 5

$\sqrt{144}$ = 12

$\sqrt{1.521}$ = ...

Un procedimiento sería «ir tanteando» o «acotando»: tomar valores que, al elevarlos al cuadrado, resulten cada vez más próximos al número dado. Seguro que has ensayado este método en clase: *«aproximaciones sucesivas por defecto» y «por exceso»...*

Pero la calculadora del Braille Hablado no necesita de tanto trabajo: calcula directamente la «raíz cuadrada» del número que le entreguemos. Tomando, como es costumbre, un ejemplo del que sepamos la respuesta, procederemos:

25 cor-| (345)	cinco (5)

Cor-| (345) es la orden por la que pedimos a la calculadora que averigüe la «raíz cuadrada» de un número, que le entregamos en ese momento o que se encuentre «en pantalla» (o que hagamos aparecer desde una «memoria»). Sería equivalente:

cálculo inmediato	**25 cor-|**	cinco (5)
con un número en pantalla	**25 cor-e cor-|**	veinticinco (25) raíz cuadrada cinco (5)
de un contenido de memoria	**25 cor-e cor-s a cor-356 a cor-|**	veinticinco (25); memoria: a correcto; puesta a cero[3]; a raíz cuadrada cinco (5)

Podríamos ahora calcular la deseada anteriormente «raíz cuadrada de 1521»:

1521 cor-|	treinta y nueve (39)

Aplícala, si quieres a un número decimal o fraccionario:

6,25 cor-|	dos coma cinco (2,5)
2/50 cor-e	cero coma dos (0,2)

Pero que no se te ocurra aplicarla a un número negativo, porque no existe: el cuadrado de todo número es positivo:

-4 cor-345	menos cuatro, raíz cuadrada Error: argumento inválido para la función

Existe otra orden o comando de la calculadora que tiene el mismo efecto:

sqrt(1521) cor-e	treinta y nueve (39)

(«sqrt»: del inglés *square root)*

Advertencia

Cuanto se ha dicho hasta aquí acerca de cor-| sólo es aplicable a «simples números». Para extraer la «raíz cuadrada de un número incluido en una expresión» deben tomarse precauciones.

---

[3] Innecesaria: se ha incluido para subrayar el papel de la «memoria de almacenamiento».

Como ocurre con otros comandos u órdenes («**%**»(456), «tanto por ciento»; «**^**» (45), «elevado a», si **cor-|** (345) se aplica directamente a una expresión en la que interviene alguna *operación elemental* («+», «-», «*», «/») «realiza previamente dicha operación u operaciones antes de extraer la raíz cuadrada»:

5+4 cor-|	tres (3=$\sqrt{9}$

Es decir: es como si cor-| ejecutara **cor-e** antes de extraer la «raíz cuadrada».

Esta es la razón por la que **cor-| se** puede aplicar tranquilamente a una fracción (un cociente, número a fin de cuentas), como si fuera un único número-término, sin distinguir *numerador* ni *denominador.* Como si primero «la pasara a la forma decimal» y luego extrajera la raíz.

Si queremos que la raíz se aplique solamente al término inmediato («4», en este ejemplo), podemos seguir diferentes caminos:

a) Empezar por extraerle la raíz cuadrada y operar con el resultado como primer término de la expresión:

4 cor-|	dos (2)
+5 cor-e	siete (7)

b) Incluirlo en una «memoria», y operar con ella:

4 cor-|	dos (2)
cor-s a	memoria: correcto
5+a cor-e	siete (7)

c) Utilizar la orden **sqrt(),** aplicada al número o expresión parcial que nos interese:

5+sqrt(4) cor-e	siete (7)

Observación

Conviene resaltar la diferente «sintaxis» de la escritura en papel y la secuencia de pulsaciones en la calculadora:

—En papel, el «signo de raíz cuadrada» se sitúa antes del número o al principio de la «expresión radicando»: $\sqrt{1521}$, $\sqrt{6{,}25}$, $\sqrt{2/50}$, $\sqrt{5+4}$ (Ésta última precisa «explicitar el radicando»; en tinta, mediante el trazo horizontal del signo de raíz; en Braille, mediante un «paréntesis auxiliar»)

—En la calculadora, la «orden de extraer la raíz cuadrada» se pulsa al final, tras el número o expresión, y entiende que debe aplicarse a toda ella, una vez efectuadas las operaciones que la integran.

27. Redondeo de decimales y aproximaciones por defecto y por exceso

Recordarás el papel que jugaba el parámetro *«Precisión* en la calculadora», que se modificaba con **cor-p n cor-e,** donde «n» era un número entero entre 1 y 12. Con él se fijaba el «número de cifras decimales que nos leería en una expresión decimal».

Pues bien, vamos a ver qué ocurre a medida que aumentamos la «Precisión» para un número con muchas (¡infinitas!) cifras decimales, que es algo muy curioso y que quizás ya te habrás dado cuenta.

Situemos la «Precisión» en «1», y pidamos a la calculadora que halle la «raíz cuadrada de 7»:

precisión a 1	**Cor-p 1 cor-e**	introducir precisión: uno correcto
raíz cuadrada de 7	**7 cor-|**	dos coma seis (2,6)

Evidentemente «2,6» no es la raíz cuadrada exacta de 7, porque «$2{,}6^2$=6,76» no es igual a 7. Debe haber más cifras decimales. Para conocerlas, aumentamos la «precisión» a 2, «manteniendo en pantalla» el valor obtenido de $\sqrt{7}$:

precisión a 2	**Cor-p 2 cor-e**	introducir precisión: dos correcto
volver a leer la raíz cuadrada de 7	**Cor-e**	dos coma seis cinco (2,65)

(Te recuerdo que, aunque la calculadora sólo lea uno, dos, tres... decimales, conserva para su uso «una aproximación mucho mayor de la raíz cuadrada de 7»; no digo «exacta», por lo que veremos más adelante.) Ahora con «Precisión 3»:

precisión a 3	**Cor-p 3 cor-e**	introducir precisión: tres correcto
volver a leer la raíz cuadrada de 7	**Cor-e**	dos coma seis cuatro seis (2,646)

¿Cómo puede ser?: antes, «2,65»; ahora: «2,646». ¿Cómo puede ser que cambie la segunda cifra decimal?...

Efectivamente, la diferencia se encuentra en el número de cifras decimales que consideremos.

Para un valor y un determinado número de cifras decimales, existen -en general- tres «aproximaciones»:

—*Aproximación por defecto:* «cortando» la expresión decimal en el número de cifras decimales deseado.

—*Aproximación por exceso:* ídem, pero incrementando una unidad la última cifra decimal.

—*Aproximación por redondeo:* tomando la «aproximación por defecto», si la siguiente cifra decimal es menor que «5»[4]; o la «aproximación por exceso», si la siguiente cifra decimal es «5» o mayor. No se puede determinar si no se conoce una cifra decimal más de las pedidas.

A fin de cuentas la «aproximación por redondeo» se va hacia la «aproximación por defecto» o «por exceso»: hacia la «más próxima».

Si continuáramos aumentando el número de cifras de «Precisión», conseguiríamos para «$\sqrt{7}$» con la calculadora del Braille Hablado el siguiente cuadro:

número de cifras decimales	aproximación por defecto	aproximación por redondeo	aproximación por exceso
1	2,6	2,6	2,6
2	2,64	2,65	2,65
3	2,645	2,646	2,646
4	2,6457	2,6458	2,6458
5	2,64575	2,64575	2,64576
6	2,645751	2,645751	2,645752

La calculadora del Braille Hablado proporciona «gratuitamente» la «aproximación por redondeo» para «n cifras decimales», sin más que poner «Precisión n». Para hallar las «aproximaciones por defecto» o por «exceso», debe ponerse «Precisión n+1», y tomar o incrementar en una unidad la n-ésima cifra decimal, según se pida una u otra.

Dice la «aproximación por redondeo» correspondiente al número de cifras decimales fijado en la «Precisión» por **cor-p.** Aunque conserva como resultado y «en pantalla» el «valor por redondeo» para 12 cifras decimales.

Que funciona «por redondeo», ya lo hemos experimentado. Comprobemos ahora esta segunda parte: que nuestra calculadora funciona con 12 cifras decimales.

Continuando con «$\sqrt{7}$», y poniendo «Precisión 12», al multiplicar reiteradamente por 10, obtenemos:

2,645751311065
26,45751311065
264,5751311065
2645,751311065

[4] Es una simplificación: *si el resto decimal que sigue es menor o igual que la mitad de la unidad decimal de truncamiento.*

Parece que no hubiera más cifras decimales tras el «5».

Guardando el último valor en una memoria, y elevándolo después al cuadrado, resulta:

cor-s z	memoria, z correcto
z*z cor-e	7000000,000001

En lugar de «siete millones», que debería haber sido el resultado. Lo que significa que «2645,751311065» -el valor almacenado en «z»- «es superior a 1000V7». Luego el valor inicial de «$\sqrt{7}$» es superior al real; es decir: el «redondeo» está efectuado «al alza», «por exceso», pero nunca apareció la siguiente cifra decimal (la 13ª).

Comprueba tus conocimientos sobre «aproximaciones» y funcionamiento de tu calculadora:

a) Halla la «aproximación por defecto hasta la cuarta cifra decimal» de 29/11.

b) ídem «por exceso» de 82/13.

c) Averigua si la aproximación que da la calculadora para $\sqrt{2}$.

d) ídem, para $\sqrt{11}$.

B) FUNCIONES DE LA CALCULADORA CIENTÍFICA

Este apartado está constituido por las unidades 28 a 52, cuyos contenidos son los siguientes:

28 División entera. Las funciones «trunc» y «div».

29 Resto de la división entera. La función «mod».

30 Media aritmética. La función «avg».

31 Sumatorio. La función «sum».

32 Mediana. La función «median».

33 El número «pi».

34 Potencias de exponente entero negativo.

35 Cálculo «en archivo» o «extra-calculadora»: el comando «OK».

36 Notación científica. La letra-operador «E».

37 Potencias generales. La función «power» y el signo «^» (45).

38 Raíces generales (I). La función «root».

39 Raíces generales (II). Mediante la función «power» o el signo «^» (45).

40 Desviación típica y varianza. La función «stddev».

41 Definición de «funciones personales» (I). Mediante «cálculos en archivo».

42 Definición de «funciones personales» (II). Mediante «macros de calculadora».

43 Comprobación de soluciones de ecuaciones.

44 Comprobación de soluciones de un sistema de ecuaciones.

45 Generación de progresiones aritméticas.

46 Generación de progresiones geométricas. «Macros de iteración automática».

47 índices y sucesiones generales.

48 Factorial (la función «fact»).

49 Números combinatorios.

50 El número «e». Exponenciales. (La función «exp»)

51 Logaritmos y funciones logarítmicas (las funciones «log», «In», «alog» y «aln»).

52 Funciones circulares o trigonométricas. Cambio entre «medidas sexagesimales» y «radianes».

28. División entera. Las funciones «trunc» y «div»

En la calculadora, al hacer una división con «/»(⠼,34), se obtiene como resultado el «cociente exacto», con cuantos decimales tenga; aunque sólo nos lea los que mande la «precisión» que hayamos fijado.

Pero hay ocasiones en que no necesitamos este «cociente exacto» con todos sus decimales; ni siquiera uno: nos bastaría con el *cociente entero por defecto.* Además, nos gustaría tenerlo «disponible», para poder insertarlo en un archivo, o guardarlo en una memoria.

Como viene siendo habitual, podemos servirnos de varios procedimientos. Unos, basados en nuestro esfuerzo o ingenio; otros, gracias a las posibilidades de la calculadora del Braille Hablado.

Veamos, pues, diferentes caminos para obtener el *cociente entero por defecto* de una división.

1º) *Borrado manual.* Se efectúa la *división ordinaria* con«/»(, 34), e intentamos quedarnos sólo con la *parte entera.* Si lo incluimos en un archivo de texto, podemos utilizar el comando de borrar **cor-d** para suprimir la coma y la «parte decimal», si existe (desde luego: más seguro que confiarlo a nuestra memoria).

Podemos simplificar algo la tarea:

2º) *Borrado manual reducido.* Fijar la «precisión» al mínimo **«1»,** con **cor-p 1 cor-e** (no es posible «precisión 0»).

3º) *Recurso a ¡a función* ***trunc.*** Bien aplicándola al cociente exacto de la división guardado en una «memoria», bien combinándola con la propia división:

efectuar la división	**1000000/7 cor-e**	ciento cuarenta y dos mil ochocientos (142857,1429)
guardar el resultado en la memoria z	**cor-s z**	memoria: z correcto (z=142857,1428571...)
obtener la «parte entera» de z	**trunc(z) cor-e**	ciento cuarenta y dos mil... (142857)
combinando truncamiento y división	**trunc(1000000/7) cor-e**	ciento cuarenta y dos mil ochocientos cincuenta y siete (142857)

Previa división y empleo de memoria

La función **trunc** tiene como efecto -acabas de observarlo-«truncar» o «cortar» el número que se le entrega, devolviendo solamente la *parte entera,* y despreciando la *parte decimal,* si existía. Sí en lugar de un número se le entrega una expresión, primero calcula ésta, y actúa luego sobre el resultado.

Advierte que **trunc** exige que la cantidad, memoria o expresión vaya entre paréntesis.

4º) *Recurso a la función* ***div.*** Llamada *«división entera»,* que proporciona directamente el resultado:

Div(1000000 7)cor-e	ciento cuarenta y dos mil ochocientos cincuenta y siete (142857)

Observa la «sintaxis» de esta función **div:**

—Tras el indicativo o nombre de la función (, div), se introducen «dividendo» y «divisor», por este orden, *entre paréntesis y separados por un*

espacio en blanco.

—Es indiferente que las letras de **div** sean minúsculas o mayúsculas.

—Un único «espacio en blanco» de separación entre «dividendo» y «divisor»; más de uno, daría «error».

—«Dividendo» y «divisor» pueden ser cantidades, contenidos de memoria o expresiones con operaciones (que la calculadora efectuaría previamente).

Como es evidente, las funciones **trunc** y **div** tiene sentido utilizarlas si las cantidades que se manejan son grandes. De otra forma, debe bastar con la propia memoria -la del operario, no tanto las de la calculadora-.

Calcula, por ambos procedimientos -sirviéndote de la función **trunc** y de **div-** los cocientes enteros por defecto:

a) 200:12; b) 3.210:83; c) 5.000.000:35; d) 111.111:456.

29. Resto de la división entera. La función «mod»

Con **div,** o con **trunc** y una memoria, podemos hallar el «cociente entero por defecto de una división». De forma análoga, se puede hallar el «resto entero por defecto».

De la igualdad fundamental de la división, se deduce:

D=dxc+r	<=>	r = D-dxc
Dividendo = divisor x xcociente + resto		*resto = Dividendo - divisorx x cociente*

Dejando a un lado el procedimiento simplón de efectuar «manualmente» el cálculo del segundo miembro, se puede recurrir a las «memorias» para hallar el «resto entero» deseado:

guardar el «dividendo» en la memoria a	**1000000 cor-e cor-s a**	un millón; memoria: a correcto
guardar el «divisor» en la memoria b	**7 cor-e cor-s b**	siete; memoria: b correcto
efectuar la división entera	**div(a/b) cor-e**	142857
guardar el cociente en la memoria c	**cor-s c**	memoria: c correcto
calcular el «resto entero»	**a-b*c cor-e**	uno (1)

La calculadora del Braille Hablado dispone, sin embargo, de una función capaz de calcular directamente este «resto entero por defecto»:

Mod(1000000 7)cor-e	uno (1)

La función **mod** es el complemento natural de **div.** Reclama los mismos requisitos sintácticos:

—Tras el indicativo o nombre de la función **(mod),** se introducen «dividendo» y «divisor», por este orden, *entre paréntesis y separados por un espacio en blanco.*

—Es indiferente que las letras de **mod** sean minúsculas o mayúsculas.

—Un único «espacio en blanco» de separación entre «dividendo» y «divisor»; más de uno, daría «error».

—«Dividendo» y «divisor» pueden ser cantidades, contenidos de memoria o expresiones con operaciones (que la calculadora efectuaría previamente).

El apelativo **mod** es difícil de justificar aquí: responde al concepto de «resto *módulo...* (el divisor)», propio de la Teoría de la Divisibilidad.

Halla los restos por la división entera de los siguientes cocientes:

a) 555.555:23

b)12^4:456

c) 1.948:9

30. Media aritmética. La función «avg»

La *«media aritmética»* (o, simplemente: *«media»)* de un conjunto de valores es el resultado de dividir la suma total de dichos valores por el número de éstos.

Así, si tenemos los valores «**52, 55, 58 y 61**», su «media» será:

suma total: 52+55+58+61 = 226
n° de valores: 4
media: 226/4 = 56,5

Con la calculadora, podemos proceder por varios caminos:

1º) Realizando las operaciones lisa y llanamente. A lo sumo, sirviéndonos de una memoria para almacenar la «suma total», en previsión de «accidentes»:

efectuar la suma total	**52+55+58+61 cor-e**	226
guardar en memoria	**cor-s a**	memoria: a correcto
calcular la media	**a/4 cor-e**	56,5

2º) Empleando una memoria para acumular la «suma parcial»; evitando se pierda el trabajo hasta entonces realizado:

introducir el 1er valor y guardarlo en memoria	**52 cor-e cor-s a**	52
sumar 2^{o} valor y guardar el resultado en memoria	**a+55 cor-e cor-s a**	107
ídem 3er valor	**a+58 cor-e cor-s a**	165
ídem 4° valor	**a+61 cor-e cor-s a**	226
calcular la media	**a/4 cor-e**	56,5

(Obsérvese cómo es preciso *calcular cada suma parcial* con **cor-e;** de lo contrario, no se efectuaría, y en la memoria se almacenaría el último valor «fijado en pantalla»: la última suma parcial efectuada.)

Este procedimiento permite interrumpir la suma en cualquier punto, para retomarla cuando deseemos o podamos. Es muy útil cuando se trata de un número elevado de términos (claro que deberemos recordar dónde interrumpimos la suma...).

3^{o}) Recurso a la función **avg** (del inglés «average», «media»), que calcula la «media aritmética» por sí sola, sin necesidad de llevar cuenta del número de términos:

avg(52 55 58 61) cor-e	56,5

La sintaxis es la ya familiar:

—Tras el indicativo o nombre **avg** de la función, se introducen los valores a tratar, en cualquier orden, *encerrados todos entre paréntesis y separados entre sí por un espacio en blanco.*

—Es indiferente que las letras de **avg** sean minúsculas o mayúsculas.

—Un único «espacio en blanco» de separación entre valores; más de uno, daría «error».

—Los números a tratar pueden ser de cualquier tipo (enteros, positivos o negativos, fracciones enteras, decimales, raíces, etc.), contenidos de memoria o expresiones con operaciones (que la calculadora efectuaría previamente).

Halla la media aritmética de:

a) Los diez primeros números: 1, 2, 3..., 10.

b) Los cuadrados de 2, 3, 4, 5, 6 y 7.

c) Los números contenidos en las memorias a, b, c, d y e. Después, explora su contenido, comprobando el resultado que obtuviste.

31. Sumatorio. La función «sum»

Sobre todo en Estadística y *Tratamiento de la Información* es frecuente utilizar el signo «∑» (⣏⣹, puntos 45,234; letra griega «sigma mayúscula»), y que se lee *«sumatorio».*

Se quiere significar con él que debe realizarse la suma de todos los términos abarcados por los límites indicados para el *«índice de sumación».*

Por ejemplo:

$$\sum_{i=2}^{i=7} i^2 = 2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+7^2$$

$$\sum_{n=1}^{n=4} (2n+1) = 3^2+5^2+7^2+9^2$$

Las operaciones y la suma total, háganse como se pueda...

La calculadora del Braille Hablado puede facilitar un tanto estas operaciones: mediante la función **sum** *{«suma»),* que efectúa la suma de los términos que le entreguemos.

Tras haber visto la función **avg** que calcula directamente la «medía aritmética» de esos términos, ya no nos llama la atención: **sum** se queda a mitad de camino, realizando solamente la suma; no divide por el número de términos que le hayamos entregado.

Para los dos ejemplos anteriores:

Sum(2^2 3^2 4^2 5^2 6^2 7^2) cor-e
Sum(3^2 5^2 7^2 9^2) cor-e

La «sintaxis» o forma de introducir la función es idéntica a la señalada para **avg.** No tiene más misterio, ni merece la pena dedicarle más tiempo.

Indicar, tan sólo, que puede emplearse como paso intermedio para calcular la «media aritmética», sustituyendo a los pasos para calcular la «suma total». Pero el trabajo y riesgo de error es el mismo que al servirse de **avg.**

32. Mediana. La función «median»

En Estadística y *Tratamiento de la Información* se utilizan frecuentemente tres «parámetros» o valores que, en alguna forma, «describen» o dan una cierta información global de una «distribución» o colección numérica. Son los llamados *«parámetros de centralización»* o *«de tendencia central»,* porque suelen hallarse *hacia la mitad* de ese conjunto de números, supuesto que los tengamos ordenados: **media aritmética** -que ya conoces-, **mediana y moda.** Ahora trataremos de la «mediana».

La **mediana** de una distribución numérica es un valor tal que, si ordenáramos de menor a mayor todos esos valores, por debajo de él se hallarían tantos como por encima.

Por ejemplo:

Median (1 3 3 4 5 6 8) cor-e	4
Median (5 15 15 20 25 30) cor-e	17,5

Aprovecho para presentarte a la función **median** de la calculadora del Braille Hablado, útil para hallar la *«mediana»* de una distribución numérica. Naturalmente, no olvides pulsar **cor-e** para «localizarla» (haría las veces de *«=»).*

Su *sintaxis* o forma de *llamarla* es la siguiente -muy semejante a la de **avg-,** pero con una salvedad importantísima:

—Es indiferente que las letras de **median** sean minúsculas o mayúsculas.

—Tras el indicativo o nombre **median** de la función, se introducen los valores de la distribución en *orden ascendente o descendente, encerrados entre paréntesis y separados entre sí por un espacio en blanco.*

—Un único «espacio en blanco» de separación entre valores; más de uno, daría «error».

—Los términos a tratar pueden ser números de cualquier tipo, contenidos de memoria o expresiones con operaciones (que la calculadora efectuaría previamente).

La segunda de estas condiciones es, sin duda, la que la convierte en «casi inútil»: es preciso *ordenar los valores de la colección,* que es la fase inicial y más laboriosa del cálculo de la «mediana». Pero no hace falta «contarlos». De ello se encarga nuestra calculadora.

Puede ocurrir, incluso, que coincidan resultados con un listado de elementos en desorden»:

Median(5 2 7 5 1 6 3) cor-e	**5**
Median(1 2 3 5 5 6 7) cor-e	**5**

Sin embargo:

Median(5 2 7 1 6 5 3) cor-e	1 (ocupa el lugar central)

Es decir: si no se tiene seguridad de que los elementos estén «bien

ordenados», ascendente o descendentemente, la función **median** lo único que devuelve es «el valor que ocupa el lugar central en esa lista».

Ejercítate: halla la «mediana» de las siguientes distribuciones:

a) 1, 9, 4, 2, 1, 8, 0, 8

b) 91, 18, 82, 27, 73, 36, 64, 45, 54.

c) -1, 3, 5, 2/3, 0,7, -2, -0, 4, 3.

Observación

Como puede verse en los ejemplos ofrecidos, la «mediana» de una distribución o colección numérica puede pertenecer o no a dicha colección. Aunque por lo general se determina de antemano si debe o no cumplir esta condición.

De ser obligada la pertenencia, se tomaría el valor de la distribución «mas próximo» al que devuelva la calculadora.

33. El número «pi»

Lo conoces ya: es la razón que existe en toda circunferencia entre su longitud y su diámetro. O, si lo prefieres: el número por el que debería multiplicarse el diámetro para obtener la longitud de la circunferencia.

Es necesario también para calcular el área del círculo: **«лtr^2»** («pi» por el cuadrado del radio).

Este extraño número se representa por una letra griega «**л**» (que se lee «pi»), porque es imposible expresarlo con una fracción entera o decimal; ni siquiera «periódica mixta o pura»: tiene infinitas cifras decimales, que no se repiten ni por grupos, ni hay forma de anticipar.

De muy poco serviría medir una circunferencia y su diámetro y hacer luego la división, porque el error de medida daría muy pronto al traste con el empeño. Pero existen procedimientos matemáticos -nada sencillos- para ir calculando cifra tras cifra de su parte decimal. Recientemente, se ha pasado del ¡millón y medio!...

La calculadora del Braille Hablado guarda una aproximación para **pi** de 7 cifras decimales. (¿Te bastarán?) Para hacerla aparecer debes pulsar:

número **л**	**Pi() cor-e**	3,1415927

No importa que la «p» y la «i» sean minúsculas o mayúsculas.

Tampoco importa si se introduce un número cualquiera entre los paréntesis:

pi(9) cor-e	3,1415927

Los paréntesis son indispensables cuando queremos obtener solamente su valor o está al final de una cadena de operaciones:

pi cor-e	error: operador inválido
3*pi cor-e	error: operador inválido

Sin embargo, los paréntesis se pueden omitir si «pi» se encuentra al principio o en medio de una cadena de operaciones:

pi*10 cor-e	31,42
pi+10 cor-e	13,14
pi/10 cor-e	0,31
pi^2 cor-e	9,87
pi*pi() cor-e	9,87

Como ejemplo, vamos a aprovecharlo para los ejercicios más típicos:

«En una circunferencia de radio r=5 cm, hallar la longitud de su circunferencia y el área de su círculo.»

1º) Longitud de la circunferencia.- La fórmula general es L=2лr; luego:

2*pi()*5 cor-e	31,42
2*pi*5 cor-e	31,42

Multiplicar exige emplear el signo «*» (, 256) en la calculadora del Braille Hablado.

Es indiferente el lugar que ocupe el factor «**л**», **pi(),** en la cadena de operaciones, pues el producto es conmutativo.

Si no ocupa el último lugar, basta introducir para «л» la expresión **pi.**

Nos conformamos con 2 decimales de aproximación (por «redondeo», no lo olvides).

2º) Área del círculo. La fórmula general es «$лr^2$»; luego:

pi()*5*5 cor-e	78,54
pi*5*5 cor-e	78,54

También serían válidas las secuencias:

pi*(5^2) cor-e	78,54
(5^2)*pi() cor-e	78,54

5 cor-e cor-s z pi*z*z cor-e	cinco; memoria: z correcto 78,54
5^2 cor-e cor-s z pi*z cor-e	veinticinco; memoria z correcto 78,54

Estas dos últimas, muy útiles cuando el radio es una expresión decimal o fraccionaria, pues reduce el riesgo de error al introducir los datos.

Debido a los condicionantes del signo «elevado a» «^» (, 45) cuando se emplea formando parte de expresiones en las que intervienen otras operaciones, no servirían:

p¡*5^2 cor-e	246,74
5^2*pi() cor-e	24646,66

3º) ¿Cuánto mide el radio de una circunferencia de longitud 1 m?

A partir de la fórmula «L=2лr», se deduce: «r=L/(2л)».

Luego podríamos seguir:

1/(2*pi()) cor-e	0,16
1/(2*pi) cor-e	0,16
2*pi() cor-e cor-s z 1/z cor-e	6,28; memoria z: correcto 0,16
pi*2 cor-e cor-s z 1/z cor-e	6,28; memoria z: correcto 0,16

Y no:

1/2*pi() cor-e	1,57

4º) ¿Cuál debe ser el radio de un círculo de área 9?

De la fórmula S= лr^2, se deduce: r=$\sqrt{s}$ / л o «r= $\sqrt{s}$ / $\sqrt{}$ л »; en nuestro caso: *r* = $\sqrt{9}$ / л»o «r = $\sqrt{9}$ / $\sqrt{}$ л». Luego serían posibles:

9/pi() cor-345	1,69
9 cor-345 cor-s y **pi() cor-345 cor-s z** **y/z cor-e**	3; memoria y: correcto 1,77; memoria z: correcto 1,69

34. Potencias de exponente entero negativo

¿Qué ocurre si elevamos un número a un «exponente negativo»?...

Desde luego, la definición de *potencia de un número* como *multiplicarlo por sí mismo tantas veces como indique el exponente,* no nos sirve: es imposible multiplicarlo por sí mismo un número negativo de veces.

Te propongo un experimento: probar con *«elevado a»* «^» (⁘, 45). Entra en la calculadora y:

2^-1 cor-e	cero coma cinco (0,5)
2^-2 cor-e	cero coma dos cinco (0,25)

Ese «0,5» y ese «0,25» parecen tener algo que ver, ¿no?...

Te daré una pista:

Pasa al «Modo fraccionario» con **cor-34.**
Empleando el signo «elevado a» «^» (⁘,45), vete calculando las potencias negativas de «2», y anótalas, para luego estudiarlas:

2^-1 cor-e	uno dividido dos (1/2)
2^-2 cor-e	uno dividido cuatro (1/4)
2^-3 cor-e	uno dividido ocho (1/8)
2^-4 cor-e	uno dividido uno seis (1/16)

Puedes continuar, si es que no te has dado cuenta ya...

A poco que te fijes, observarás que se trata de fracciones con «1» en el numerador y las correspondientes potencias positivas de «2» en el denominador:

$2^{-1} = 1/2 = 1/2^1$
$2^{-2} = 1/4 = 1/2^2$
$2^{-3} = 1/8 = 1/2^3$
$2^{-4} = 1/16 = 1/2^4$

Puedes aplicar la hipótesis a otras «bases»; pero, para verlo más fácilmente, no olvides el *«Modo fraccionario»:*

5^-1 cor-e	uno dividido cinco (1/5 = 1/5^1)
5^-2 cor-e	uno dividido dos cinco (1/25 = 1/5^2)

Y, ahora, cambiando para cada resultado del «Modo fraccionario» al «Modo decimal»:

10^-1 cor-e	cero coma uno (0,1 = 1/10^1)
10^-3 cor-e	cero coma cero cero uno (0,001 = 1/1000 = 1/10^3)

(Si no obtienes este último resultado y estás en «Modo decimal», revisa tu «Precisión».) Aceptado:

«La potencia negativa de un número es igual a la inversa de su potencia positiva. En la calculadora del Braille Hablado, puede calcularse mediante el signo «elevado a» «^» (⠔,45).»

Podríamos, también, servirnos de una «memoria» para hallar la «potencia positiva», y luego su inversa:

10^3 cor-e	mil (1000)
cor-s z	memoria z correcto
1/z cor-e	cero coma cero cero uno (0,001)

Hay más. Por ejemplo:

$2^{-3} = 1/2^3 = 1^3/2^3 = (1/2)^3$

Es decir: calcular primero «1/2», y elevarlo después al correspondiente exponente positivo. Y, para ello, utilizar una «memoria»:

1/2 cor-e cor-s z	uno dividido dos; memoria z correcto
z^3 cor-e	uno dividido ocho (1/8 = 1/2^3)

Más que útil, pone de manifiesto el significado de *«potencia negativa»* como *«potencia del inverso de la base o base inversa».*

Completemos el cuadro de las «potencias de exponente entero»:

2^0 cor-e	uno (1)
10^0 cor-e	uno (1)
17,52 ^0 cor-e	uno (1)

«Para cualquier base, la potencia de exponente cero es igual a 1»

Aparte del feliz resultado de poder operarse en la calculadora del Braille Hablado con el signo «elevado a» «^» (⠔, 45) para exponentes negativos, el significado y resultado tienen un fundamento matemático coherente, basado en las propiedades de las potencias. Como las habrás visto en clase, repásalas; si no, pregúntaselas a tu profesor, o que te ponga ejercicios para comprobarlas.

Antes de operar en la calculadora, razona:

a) ¿Cuál será la diferencia entre las cadenas **-2^-2 y (-2)^-2, -2^-3 y (-2)^-3?**

b) ¿Cuál será el resultado de **0,5^-2** y de **0,25^-2**? ¿Por qué?

c) ¿A qué exponente debería elevarse 10 para que el resultado fuera **0,0001** ? ¿Y **0,01** ?

d) ¿Qué número elevado a **-3** da como resultado **0,008**? (¡Cuidado con la «Precisión»!...)

Advertencia

Como es lógico, para exponentes negativos el signo «elevado a» «^» (, 45) tiene las mismas limitaciones al incluirlo en una cadena de operaciones que se vieron en la Unidad 23.

35. Cálculo «en archivo» o «extra calculadora». El comando «ok»

A poco inglés que conozcas, sabes lo que significa «OK».

Pues bien: el Braille Hablado tiene su comando u orden «OK», que se pulsa **cor-o k** (minúsculas, por supuesto). Hace las veces de calculadora, y -lo que es más interesante-¡estando en cualquier archivo!

Veamos cómo funciona.

En un archivo de texto cualquiera -«papelera», por ejemplo-, efectúa los siguientes pasos:

1º) Asegúrate de que estás en *«Transcriptor de Braille, no»,* con:

cor-p t n	introduzca parámetro, transcriptor Braille no

No es imprescindible, pero así podrás controlar mejor la escritura. Pues los números y signos de operaciones deberán estar escritos como en la calculadora: en *Braille computerizado.*

2º) Escribe un **control-m,** con **cor-46,** para iniciar nueva línea, y -al final del texto- la expresión de la que quieres calcular su valor, como si estuvieras en **Calculadora.** Por ejemplo: **6*5+3.**

Ni que decir tiene que la *sintaxis* o forma de escribir la expresión es la misma que en la calculadora: cifras, signos de operaciones, paréntesis, letras para «memorias», sin «espacios en blanco», etc. Aunque con una ventaja: puede haber «espacios en blanco» al principio o al final, cuantos quieras.

3º) Lee esa expresión; con **cor-2** o **cor-25,** o con **cor-c,** si estás en *«Modo de lectura Líneas».*

4º) Pulsa **cor-o k.** Habrás obtenido el resultado, que quedará registrado en *«Papelera»* y en la pantalla de la calculadora -aunque no has entrado en ella para nada-, por si necesitas consultarlo o «importarlo», sin que tengas que hacer el esfuerzo de recordarlo, si confundes algún valor, etc. Pero si estabas en *«Papelera»,* se «machaca» lo que tenías escrito, y aparece solamente el resultado.

Incluso puedes «completar una igualdad para la expresión en ese mismo archivo: **6*5+3** = **33;** sin más que añadir a la expresión escrita el signo «=»; «33» lo consigues con **cor-0 c».**

Muy importante. Si en la expresión intervienen letras, representan «variables» que, al pulsar **cor-o k** toman el valor numérico guardado en la correspondiente «memoria de la calculadora».

Por ejemplo: si se escribe **3*a+2*b,** antes de pulsar **cor-o k,** ensayemos:

agregar una expresión al archivo	**cor-46 3*a+2*b**	control m ...
entrar en calculadora	**cor-o c**	opción: calculadora preparada
hacer a=10	**10 cor-e cor-s a**	diez; memoria a correcto
hacer b=6	**6 cor-e cor-s b**	seis; memoria b correcto
salir de calculadora	**cor-z**	Salida
asegurar la lectura de la expresión	**cor-25**	3*a+2*b
ejecutar la operación	**cor-o k**	cuarenta y dos (42 = 3*10+2*6

(Ha sustituido «a» por «10», y «b» por «6»).

Observaciones

La condición «Transcriptor Braille no», indicada en el paso 1º, no es imprescindible: tiene por única finalidad facilitar la lectura y corrección de la expresión escrita o a medida que se escribe.

La indicación de pulsar **cor-46 (ctrl.-m)** antes de iniciar la escritura de la expresión a evaluar sólo es imprescindible» si el *«Modo de lectura»* es el de *«Líneas»;* no para *«Modo de lectura Ventanas»,* como se analiza a continuación.

El paso 3º se incluye en previsión de hallarse en *«Modo de lectura Ventanas».* Pues *el cálculo se efectúa al igual que la lectura:* **a partir del comienzo de línea** para *«Modo de lectura Líneas»,* y **a partir del cursor** para *«Modo de lectura Ventanas».*

De encontrarse en *«Modo de lectura Ventanas»* y se pulsara **cor-o k** recién escrita la expresión, sin leerla previamente, sólo consideraría la última cifra. O, situando el cursor en un cierto lugar, sólo calcularía desde ese punto hasta el final.

El comando **cor-c** de la calculadora tiene aquí los mismos efectos si se está en *«Modo de lectura Líneas».* En *«Modo de lectura Ventanas»,* podrá releerse con **cor-2** o **cor-25.**

Para corregir no es preciso el empleo reiterado de **cor-b,** como en la

calculadora. Aquí basta con situar el cursor en el lugar oportuno con **cor-3 y cor-6,** y sobrescribir con **cor-246** o borrar con **cor-d.**

Sólo puede evaluarse una expresión que se encuentre «al final del archivo». Si tras ella existen otros caracteres distintos del «espacio en blanco», la respuesta será *«Error: error de sintaxis».* Incluso si el último carácter es **ctrl.-m.**

36. Notación científica. La letra-operador «e»

En Astronomía, como las distancias son gigantescas, se utiliza como unidad de medida el «año luz»: la distancia que recorre la luz en un año, a razón de 300.000 km/s. Por tanto, en metros (unidad del S.I.), sería:

300000*60*60*24*365*1000 cor-e	... 9.46E15

¡Qué raro!, ¿no? ¿Qué es eso de «E15»?...

Sin embargo, si dejáramos la distancia en kilómetros, sin pasarla a metros, resultaría:

300000*60*60*24*365 cor-e	9460800000000

(Bien leído, no como lo hace el «Braille Hablado»: «nueve billones, cuatrocientos sesenta mil ochocientos millones».)

Y si lo multiplicamos por 1.000, para ponerlo en metros, vuelve a decirnos: **«9,46E15»,** en vez del esperado **9460800000000000** que debiera resultar al «desplazar la coma tres lugares hacia la derecha».

Si te fijas, coinciden las primeras cifras: «946»; sólo que ahora aparece un misterioso «15» precedido de otra no menos misteriosa **«E»,** y una **coma** que no se sabe de dónde sale...

Colocando en la cantidad que esperábamos **9.460.800.000.000.000** una **coma** en el lugar que indica la calculadora, quedaría: **9,460800000000000;** es decir: quedarían «15 cifras a la derecha de la coma».

Para dejar las cosas en su sitio, deberíamos desplazar la coma hacia la derecha 15 lugares; esto es: multiplicar por...*1.000.000.000.000.000;* cantidad enorme que se expresa más brevemente como «10^{15}», ¿no?

Pues bien: ese *«multiplicar por la unidad seguida de 15 ceros»,* o por «10^{15}», la calculadora lo expresa por **«E15».**

Se aclaró el misterio.

¿Cómo escribir de «forma corriente» 10^{24}?... ¡Muy bien!: «un cuatrillón», «1.000.000.000.000.000.000.000.000»

¿Y cómo es de esperar lo diría la calculadora?...

Veámoslo.

Como empezar a poner ceros es un rollo, lo introduciremos en forma de potencia de 10:

10^24 cor-e	... 1E24

Es decir: «E» viene a significar: *«por diez elevado a...»*

Podemos introducir en la calculadora directamente los números grandes en esta forma; o no tan grandes:

1e5 cor-e	100000
2e5 cor-e	200000
3,6e6 cor-e	3600000

¿Cómo introducir con esta forma los números que en papel se escribirían?:

a) 15.000

b) un billón

c) $2{,}34.10^9$

Es la llamada **«notación científica»:**

Un número con una unidad entera y dos decimales (uno, o más, según se acuerde), si es el caso.

Multiplicado por una potencia de 10.

¿Se pueden utilizar potencias negativas; por ejemplo: **2e-4**?

Claro que sí:

2e-4 cor-e	...0

Por favor revisa la «precisión» y fíjala en ... 12. Verás qué:

2e-4 cor-e	0,0002 (=2/10000)

¡Claro!: $2/10000 = 2/(10^4) = 2.10^{-4} = 2e\text{-}4$

Pasa las cantidades siguientes de notación decimal a científica y viceversa, escribiendo también en papel -correctamente- la forma potencial:

d) 0,000025

e) $1{,}24.10^{-6}$

f) 3,5e-2

Advertencia

La «notación científica» es un «producto». Pero en la calculadora no aparece ni se introduce signo alguno de multiplicar, aunque sí se escriba en papel, ya que en lugar de la «E» se escribe -de ordinario- la potencia de 10, tal como se ha hecho en los ejemplos.

Observaciones

Pese a que al copiar en un fichero (con **cor-0 c** o *insertando* con **cor-i cor-e)** un número en «notación científica» aparece la «E» mayúscula, es indiferente al introducir valores en la calculadora.

Para números en «notación científica» en la calculadora del Braille Hablado, aparecen tantos decimales como se hayan fijado con la «Precisión:

precisión 2	**123456789*(10^10) cor-e**	1,23E18
precisión 3	**uno dividido cuatro (1/4)**	*1,234E18*

37. Potencias generales. La función «power» y el signo «^» *(45)*

Unidades atrás veíamos cómo calcular «potencias de exponente entero», positivo o negativo». ¿No sientes curiosidad de calcular también las de «exponente fraccionario o decimal»?...

Estoy seguro de que sabes qué representa $27^{1/3}$. Por si acaso: elevando al cubo (denominador del exponente) esa expresión, resultaría:

$(27^{1/3})^3 - 27^{1/3x3} = 27^{3/3} - 27^1 = 27$

(Por la propiedad de «la potencia de una potencia».) Luego «$27^{1/3}$» es algo que «elevado al cubo» da «27»; por tanto, debe ser«$\sqrt[3]{27}$ ». Ampliando un poco el campo:

$27^{2/3} - 27^{2x1/3} = (27^2)^{1/3} = {}^3\backslash/27^2$

$16^{0,5} = 16^{1/2} = \sqrt{16}$

Generalizando:

$a^{m/n} = \sqrt[n]{a}^{\,m}$

Cuando el exponente sea decimal, bastará con expresarlo en forma fraccionaria.

Lo que ahora nos interesa es saber cómo hallar con la calculadora una «potencia de exponente fraccionario o decimal», al margen de su significado. Pues bien fácil. En la calculadora del Braille Hablado, de dos formas:

1ª) Mediante la operación «elevado a», con el signo «^» (⠢,45):

27^1/3 cor-e	tres (3 = $\sqrt[3]{27}$)
27^2/3 cor-e	nueve (9 = $\sqrt[3]{27}^{2}$ = 3^2)
16^0,5 cor-e	cuatro (4 = $\sqrt{16}$)

2ª) Mediante la función **power** (del inglés: *potencia):*

power(27 1/3) cor-e	tres
power(27 2/3) cor-e	nueve
power(16 0,5) cor-e	cuatro

La función **power** sigue la misma «sintaxis» que **div** y **mod;** o, en alguna forma, que **avg, sum** o **median** (refresca tu memoria, recordando para qué servían cada una de estas funciones).

Es indiferente escribir **power** en minúsculas o mayúsculas.

El primer término a introducir entre paréntesis es la «base de la potencia»; el segundo, el «exponente».

Entre «base» y «exponente» debe respetarse «un espacio en blanco» y sólo ahí.

Como «base» y «exponente» pueden emplearse expresiones cualesquiera, que la calculadora evaluará antes de proceder a calcular la potencia. Si se desea, incluyendo «letras para valores en memorias»:

A^b	power(a b)
$(3+2)^{4-1}$	power(3+2 4-1)

Precisamente esta última propiedad diferencia un tanto a la función **power** del signo «^».

Advertencia

La operación «elevado a», a realizar con el signo «^» (⠢, 45) se comporta de forma distinta «a izquierda» (antes) y «a derecha» (después):

Considera como «base» el resultado de calcular toda la expresión situada a su «izquierda» (que le precede). Como se advertía en la Unidad 23.

Para la expresión que le sigue (situada a su derecha), sólo «considera como exponente» el resultado de calcular los productos y cocientes inmediatos, dejando fuera del exponente las sumas y restas. Si éstas desean incluirse en aquél, deberán emplearse «paréntesis»:

3+2^4-1 cor-e	624 (=5^4-1)
3+2^(4-1) cor-e	125 (=5^3)
2^3*2+1 cor-e	65 (=2^6+1)
2^(3*2+1) cor-e	128 (=2^7)
16^1/4+3 cor-e	5 (= $\sqrt[4]{16+3}$ = 2+3)
16^(1/4+3) cor-e	8192 (=$16^{13/4}$ = $\sqrt[4]{16}^{13}$ = 2^{13})

38. Raíces generales (I). La función «root»

Al tratar de la «raíz cuadrada» veíamos que había dos procedimientos:

1º) Aplicar el operador **cor-345** a «la expresión en pantalla»:

25+10*3-6 cor-345	siete (7 = V49)

2º) Emplear la función **sqrt** (del inglés *square root):*

sqrt(25+10*3-6) cor-e	siete

¿Qué ocurre para otras raíces, con índice distinto de «2»?...

Existe una función especial: **root** (en inglés, *raíz):*

raíz cúbica	**root(27 3) cor-e**	tres (3 = $\sqrt[3]{27}$
raíz de índice 4	**root(16 4) cor-e**	dos (2 = $\sqrt[4]{16}$

Incluso podemos permitirnos el lujo de emplear «índices fraccionarios y negativos:

raíz de índice fraccionario	**root(27 1/2) cor-e**	... 729 (= 27^2 = $27^{1/1/2}$ = $\sqrt[1/2]{27}$)
raíz de índice decimal	**root(4 0,5) cor-e**	dieciséis (16 = 4^2 = 4 $^{1/0,5}$ = $\sqrt[0,5]{4}$)
raíz de índice negativo	**root(27 -3) cor-e**	0,333... (=1/3 = 3^{-1} =$3^{-3/3}$ = =$(3^3)^{-1/3}$ = $27^{-1/3}$ = $\sqrt[-3]{27}$)
raíz de base negativa	**root(-27 3) cor-e**	error: argumento inválido para la función

¡Te hemos pillado, calculadora!:

$\sqrt[3]{-27}$ = $(-27)^{1/3}$ = $((-3)^3)^{1/3}$ = $(-3)^{3/3}$ = (-3)1 = -3

Advertencia

La función **root** de la calculadora del Braille Hablado no admite como «radicando» o «primer argumento» valores negativos». Pese a que, matemáticamente, tengan sentido (valor real) para ellos las *raíces de índice impar.*

Observaciones

La *sintaxis* de **root** -salvo en este «pequeño detalle»- es en todo semejante a la de **power:**

Es indiferente escribir **root** en minúsculas o mayúsculas.

El primer término a introducir entre paréntesis es el «radicando» o expresión de la que debe extraerse la raíz; el segundo, el «índice».

Entre «radicando» e «índice» debe respetarse «un espacio en blanco» y sólo ahí.

Como «radicando» e «índice» pueden emplearse expresiones cualesquiera, que la calculadora evaluará antes de proceder a extraer la raíz. Si se desea, incluyendo «letras para valores en memorias» (siempre, con la salvedad de «signo positivo para el radicando»):

root(x y) (para $\sqrt[y]{x}$)

root(62+2 4-1) (para $\sqrt[3]{64}$)

a) ¿Cómo se escribiría en Braille la expresión de calculadora **root(49 4)**?

b) ¿Y en la calculadora $\sqrt[5]{1028}$?

39. Raíces generales (II). Mediante la función «power» o el signo «**^**» ***(45)***

Acabamos de ver cómo las raíces pueden considerarse *potencias de exponente fraccionario,* con *exponente fraccionario* de denominador igual al índice de la raíz. Es decir:

$\sqrt{9} = 9^{1/2}$
$\sqrt[3]{8}\,^2 = 8^{2/3}$
$\sqrt[0,5]{16} = 16^{1/0´5} = 16^2$
$\sqrt[5+2]{128} = 128^{1/(5+2)} = 128^{1/7}$

Podemos, pues, servirnos de la función **power** y del signo «^» (⠘, puntos 45)

de «elevado a» para calcular raíces en la calculadora del Braille Hablado. Sin más que tener presente la equivalencia que arriba queda dicha. Serían equivalentes las expresiones:

root(9 2)	**power(9 1/2)**	$9^{1/2}$
root(8 3)	**power(8 1/3)**	$8^{1/3}$
root(16 0,5)	**power(16 1/0,5)**	$16^{1/0,5}$
root(128 5+2)	**power(128 1/(5+2)**	$128^{1/(5+2)}$

Observa cómo en este último ejemplo ha sido necesario recurrir a un paréntesis para recoger el denominador, debido a la «escritura lineal» al introducir datos en la calculadora.

Sirviéndote de **power** y «elevado a» (^), calcula:

a) $\sqrt[4]{81}, \sqrt[-3]{512}, \sqrt[0,3]{1/1028}$

b) $\sqrt[3+4]{256}, \sqrt[2x3]{729}, \sqrt[4/5]{10.000}$

Observación

Es interesante ver qué ocurre cuando se opera con «^» sobre números expresados en «notación científica»:

1e2^-3 cor-e	1E-06
2e2^-3 cor-e	1,25E-07

Razonemos, confiados en el resultado:

1,25E-07 = 0,125E-06 = 1/8XE-06 = $2^{-3}x(E^2)^{-3} = (2E2)^{-3}$

40. Desviación típica y varianza. La función «stddev»

Unidades atrás se trató de cómo calcular «parámetros de centralización de una distribución numérica»; de las funciones avg para la «media» y **median** para la «mediana»; esta última, con limitaciones importantes:

media	**avg(5 2 7 1 6 5 3) cor-e**	4,14
mediana (sin ordenar)	**median (5 2 7 1 6 5 3) cor-e**	1 (ocupa la posición central)
mediana (previa ordenación ascen.)	**median (1 2 3 5 5 6 7) cor-e**	5
mediana (previa ordenación descen.)	**median (7 6 5 5 3 2 1) cor-e**	5

Consideraremos ahora otro «parámetro o valor estadístico»: la «desviación

típica o standard»; indicativo de la «dispersión de los datos respecto de la «media».

Muy laborioso de obtener «a mano»; para la calculadora del Braille Hablado es un juego de niños; sobre todo, si se trata de una «distribución numérica relativamente pequeña»:

La «desviación típica» suele representarse por las letras «**σ** » (*sigma,* letra griega; en Braille: «'s»); «s» y, por definición, se calcula mediante la fórmula:

$$S = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - m)}{n}}^{2}$$

donde «n» es el número de términos de la distribución numérica dada, y «m» su media.

Esto implica que deberíamos hacer Has" operaciones siguientes:

—Contar el número «n» de términos de la distribución.

—Calcular su media «m».

—Ir calculando las diferencias «x¡-m» entre cada valor de la distribución y la media «m», elevarlas al cuadrado y sumarlas.

—Dividir esa suma por el número «n» de términos.

—Extraer la raíz cuadrada de ese cociente.

Un poco largo, ¿no? Aunque, en la calculadora, podríamos servirnos de la función **sum** para hallar esa suma de cuadrados del tercer paso...

Pues bien: la calculadora del Braille Hablado lo hace todo inmediatamente, sin más que introducir los valores «x¡» de la distribución, de forma análoga a como se opera con **avg,** gracias a la función **sddev** (del inglés: *standard desviation):*

stddev(5 2 7 1 6 5 3) cor-e	2,03

Si te tomas la molestia, puedes comprobar que:

media	**avg(5 2 7 1 6 5 3) cor-e**	4,14
guardar la media en la memoria m	**cor-s m**	memoria m correcto
suma de cuadrados de distancias a la media	**sum((5-m)^2 (2-m)^2 (7-m)^2(1-m)^2(6-m)^2 (5-m)^2 (3-m)^2) cor-e**	28,857
media de los cuadrados de las distancias	**/ *7* cor-e**	4,12
desviación típica	**cor-345**	2,03

Advertencia

Muy importante. Se ha observado en algunos equipos un error nada despreciable (próximo al 8%) del cálculo efectuado por stddev, al alza respecto del itinerario «natural». Según parece, en lugar de efectuar la división por el número n de términos lo efectúan por n-1.

Conviene comprobar este extremo con una distribución sencilla, a fin de estar prevenidos e introducir el factor de corrección que se indica más abajo.

Por ejemplo:

empleo de la función «stddev»	stddev(3 5) cor-e	1,41
cálculo de la media	avg(3 5) cor-e	4
guardar media en memoria m	cor-s m	memoria m
suma de cuadrados	sum((3-m)^2 (5-m)^2) cor-e	2
media de cuadrados	/2 cor-e	1
desviación típica	cor-345	1

Este equipo, en efecto, en vez de dividir la «suma de cuadrados» por 2, lo hace por 1. La rectificación se lograría multiplicando por n-1 y dividiendo por n, pero antes de extraer la raíz cuadrada. Podemos hacerlo «a posteriori», mediante sus correspondientes raíces cuadradas; o, mejor, por la «potencia de exponente «1/2»:

empleo de la función «stddev»	**stddev(3 5) cor-e**	1,41
corrección	***(1/2^1/2) cor-e**	1

empleo de la función «stddev»	**sdddev(5 2 7 1 6 5 cor-e 3)**	2,19
corrección	***(6/7^1/2) cor-e**	2,03

Es decir: multiplicar por la raíz cuadrada del cociente entre «n-1» y «n». La expresión

***((n-1)/n^1/2)** para este «factor de corrección» es posible gracias a las propiedades de la operación «elevado a» «^» de la calculadora del Braille Hablado (ver Unidad 37).

Varianza

Suele definirse como «σ^2» o «media de los cuadrados de las desviaciones a la media de la distribución». En suma: «el cuadrado de la desviación típica»; por tanto:

cálculo de la desviación típica	**stddev(5 2 7 1 6 5 3) cor-e**	2,03
guardar en la memoria «s»	**cor-s s**	memoria s correcto
cálculo de la varianza	**s^2 cor-e**	4,12

(Es preciso recurrir al empleo de una memoria, ya que «elevado a» por «^» exige anteponerle la base: no puede actuar directamente sobre el «valor en pantalla». Podría también haberse operado como simple producto: **s*s**.)

41. Definición de «funciones personales» (I). Mediante «cálculos en archivo»

En la Unidad 35 veíamos cómo efectuar cálculos desde un archivo de texto cualquiera, sin necesidad de «entrar en el modo calculadora».

Se indicaba allí cómo la expresión a evaluar podía comprender «letras» que, al efectuar los cálculos, se sustituirían por el valor numérico de la correspondiente «memoria de la calculadora»... Si se modificaba este valor, cambiaría muy posiblemente el resultado de la expresión. Es decir: esas «letras» podían jugar el papel de *variables de una función.*

Gracias al comando **OK (cor-o k)** se puede calcular fácilmente el valor que toma una función definida a nuestro gusto para valores numéricos de la «variable» o «variables independientes». Distinguiremos tres fases:

Fase preparatoria. Abre un archivo cualquiera de la **RAM;** pero no *«Papelera»:* al efectuar un cálculo, se te borraría la expresión que escribieras, y queremos conservarla para trabajar con ella.

Son convenientes dos operaciones previas para favorecer el éxito de la empresa:

1º) facilitar la lectura de la expresión en Braille computerizado	**cor-p t n**	introduzca parámetro, transcriptor Braille no. correcto
2º) empezar «nueva línea» al final del texto	**cor-46**	control m

Fase de definición de la función. Podemos escribir ahora la expresión algebraica correspondiente a nuestra «función». Supongamos que se trata de una «función f en una variable», representada por la letra x:

f(x) = 3x+2

La *sintaxis* o forma de escribir la fórmula de la función debe ser idéntica a como se hace en la calculadora; por tanto:

3º) escribir la función	**3*x+2**	tres asterisco x signo de sumar 2
4º) Leer la fórmula	**cor-2**	tres asterisco x signo de sumar 2

Este 4º paso no es imprescindible si nos encontramos en *«Modo de lectura Líneas»;* no si en *«Modo de lectura Ventanas».* Es conveniente, sin embargo, porque puede denunciar algún error de escritura. Es más: es conveniente incluso «deletrear la fórmula» con **cor-25** pulsado dos veces:

5º) deletrear la fórmula	**cor-25 cor-25**	tres; asterisco; x; signo de sumar; 2

Fase de cálculo del valor de la función para valores determinados de la/s variable/s. Asignamos un valor a la o las variables incluidas en la función; como estos valores deben hallarse «guardados» en la o las «memorias de la calculadora» correspondientes a las «letras de definición de variables»:

6º) entrar en calculadora	**cor-o c**	calculadora preparada
7º a) asignar valor a «x»	**10 cor-e cor-sx**	diez memoria x correcto
7º b) asignar valor a ...	**... cor-e cor-s...**	... memoria ... correcto
8º) Salir de calculadora (volver a la función)	**cor-z**	salida

Finalmente, pedimos al Braille Hablado que nos diga qué valor toma la función para ese valor que hemos asignado a su o sus variables:

9º) *Calcular el valor de la función*	**cor-o k**	treinta y dos

Para intentar asegurar la corrección en la escritura / traducción de la fórmula, es recomendable asignar inicialmente a la o las variables «valores sencillos», susceptibles de comprobación por cálculo mental; «0» y «1», por ejemplo.

Si se desean calcular más valores, basta reiterar esta Fase, repitiendo los pasos del 6º al 9º.

El paso más delicado es, sin duda el 3º, de escritura de la fórmula de definición de la función. Es un verdadero «ejercicio de transcripción». He aquí algunos ejemplos:

x^2+4x-2	**x^2+4*x-2**
$-2+4x+x^2$	**-2+4*x+(x^2)**
$\frac{z+1}{z-1}$	**(z+1)/(z-1)**
πr^2	**pi*r*r**
$\frac{4}{3}\pi r^3$	**4/3*pi*(r^3)**
5a+6b	**5*a+6*b**
¼ $\sqrt{abcd}$	**1/4*sqrt(a*b*c*d)**

Observaciones

El valor que toma la función (resultado de operaciones) se encuentra tanto en la *«Pantalla de la calculadora»* como en *«Papelera»,* permitiendo incluirlo en una expresión, como resultado de un problema, para formar una «tabla», etc.; mediante **cor-i cor-e** *{«incluir»)* o por **cor-0 c** *{«copiar de Papelera»).*

Si la variable se representa por la letra «r», basta en el paso 7º con «fijar en pantalla» el valor asignado a «r», sin necesidad de «guardarlo en memoria»; ya que la «memoria r» *{«resultado»)* lo asume de inmediato. Pero si se reiterara la orden **cor-o k, «r»** habría cambiado al «valor resultado» recién obtenido.

Como es evidente, la variable o variables pueden recibir cualesquiera valores: enteros positivos o negativos, fraccionarios, decimales... Expresados en forma ordinaria o en «notación científica»; aunque, en este último caso, pueden surgir problemas de aproximación, importante a la hora de «comprobar soluciones de ecuaciones» o «calcular raíces exactas».

42. Definición de «funciones personales» (II). Mediante «macros de calculadora»

Desde la calculadora o sirviéndonos de ella, también se pueden definir «macros» en las que intervengan números, signos de operaciones, funciones predefinidas e incluso letras de variables: como si escribiéramos una «cadena», de la que obtuviéramos después el resultado.

De esta forma, se construyen «funciones personalizadas». Sólo que hay que tener «mucho cuidado con la sintaxis», e incluso hacer comprobaciones con algún valor sencillo.

Haremos una prueba, y luego te digo las condiciones.

iniciar la macro	**cor-n, y**	definir macro y (letra de definición)
*silenciar macro	**cor-k**	macros silenciosas
entrar en calculadora	**cor-o c**	calculadora preparada
*borrado de pantalla	**cor-356**	puesta a 0
introducir fórmula de definición	**3*(x^2)+2**	... ($3x^2$+2)
*leer lo escrito hasta el presente	**cor-c**	...
*deletrear lo escrito hasta el presente	**cor-25**	...
(posibles rectificaciones)		...
Obligar a leer fórmula de def.	**cor-v cor-c**	macros habladas ...
calcular valor actual	**cor-e**	... (valor)
*silenciar la macro	**cor-k**	macros silenciosas
salir de la calculadora	**cor-z**	salida
finalizar macro de definición	**cor-n**	macro fin

Fíjate sobre todo en algunos detalles:

1º) Es indiferente la «letra de definición de la macro-función». (Aquí se ha tomado la «y», por costumbre al escribir funciones: $y=3x^2+2$).

Sólo que si tenías otra «macro» definida con esa letra, te la sustituirá, machacando la anterior.

2º) El «borrado inicial de pantalla» es una prudencia extrema: de ordinario, al introducir números o signos «se borra automáticamente» el valor anterior que había en pantalla.

3º) Forma o sintaxis con que se escribe la «fórmula de la función»: no podemos omitir el signo «*» de multiplicar -como se hace al escribir en papel-, y las potencias se encierran entre paréntesis -si no, se evaluaría lo escrito hasta entonces, para emplearlo como «base»-; claro que también podríamos haber escrito «3*x*x».

4º) Aparece la letra «x». Al efectuar los cálculos, «x» tomará «el valor guardado en ese momento en la memoria x». Si cambias «el valor de la memoria x» (variable independiente), sin cambiar la macro, cambiará también «el valor que toma la función» (variable dependiente).

Como bien has deducido, pueden emplearse todas las letras del abecedario, que aparecerán con sus correspondientes «valores de memoria» (si no quieres «tener problemas», evita la «r», donde se conserva el último resultado).

5º) Las órdenes precedidas de asterisco. No son necesarias para la definición de la función; los «muy expertos» prescinden de ellas; los «expertos prudentes» incluyen «cor-k», por si estaba activada «cor-v», o si deben hacer correcciones. Los «novatos» -no te ofendas- es bueno que las empleemos.

6º) Tras haber completado la «cadena de definición», las órdenes «cor-v» y «cor-c» nos la leen. Y no es sólo para ver si hemos cometido errores (para eso están las órdenes con asterisco), sino para recordarnos la fórmula de la función cada vez que la ejecutemos.

Si nos las hemos «dado de listos» y no hemos comprobado antes si la fórmula está bien reflejada, aún es tiempo de rectificar: o cancelar con «cor-z» dos veces (la primera, para «salir de calculadora»; la segunda, para «finalizar macro»); o retocando la fórmula a base de «cor-b», hasta el carácter equivocado, pero quedando estas correcciones verbalizadas (salvo que previamente volvamos a pulsar «cor-k»).

7º) Se finaliza con «cor-e», para que realice las operaciones; de no incluirlo, es como si únicamente hubieras escrito la fórmula, pero no hubieras querido saber cuál es el resultado.

Comprobación

Según el valor guardado en la memoria «x», así será el resultado. Sobre el

papel (o de memoria), dale a «x» un valor sencillo; por ejemplo: «0». La función debería valer... «2», ¿no? Comprobémoslo:

guardar el valor «0» en la memoria «x»	**0 cor-e cor-s x**	cero memoria: x correcto
calcular el valor actual de la función «y»	**cor-j y**	macro y ...

Si has introducido correctamente la expresión de la función y demás órdenes, deberá responder... «dos». Conforme. Repitamos la operación, por ejemplo con «1»

1 cor-e cor-s x cor-j y

La respuesta debería ser ahora... «cinco». ¿Es correcto?:

$3 \cdot 1^2+2 = 3 \cdot 1+2 = 3+2 = 5$.

¿Podrías decirme cuánto vale tu función para x=59?... ¿No te atreves a hacerlo mentalmente?... ¡Pues pregúntaselo a la calculadora:

59 cor-e cor-s x cor-j y	... 10445

¿Y cuál el valor de «y» para «x=0,75»?...

0,75 cor-e cor-s x cor-j y	... 3,6875

Forma con mensaje

Podemos sustituir la lectura de la fórmula de definición, incluyendo un «mensaje», previo a «entrar en calculadora», y antes incluso de «silenciar la macro»:

verbalizar la «macro»	**cor-v**	macros habladas
prepararse para recibir mensaje a leer	**cor-236**	mensaje
incluir el mensaje	**valor de la función 3*(x^2)+2**	... ($3x^2+2$)
dar por finalizado el mensaje	**cor-e**	fin de mensaje

(No se admiten en los «mensajes de macro» caracteres correspondientes a letras acentuadas.)

Al introducir el contenido del «mensaje», hay que ser muy cuidadoso: no es posible utilizar «lectura» ni «borrados»; ni siquiera el último carácter. Conviene, por ello, activar previamente el «Modo interactivo» con «cor-g». En caso de error, interrumpe el «mensaje» y la definición de la «macro» con «cor-z».

¡Atención!: ¡mensaje breve! Si crece mucho la «macro», puede interrumpirse por exceder un máximo de caracteres / comandos y finalizar donde menos lo

esperemos.

Forma con introducción de valores

Sirviéndonos del comando «cor-16» («pausa en la macro para un carácter») podemos ahorrarnos en «entrar previamente en calculadora para asignar valor a la variable independiente». Incluyendo también «mensajes»:

iniciar la macro	**cor-n, y**	definir macro y (letra de definición)
verbalizar la «macro»	**cor-v**	macros habladas
introducir mensaje	**cor-236 valor de x para3*(x^2)+2 cor-e**	mensaje ...
*silenciar macro	**cor-k**	macros silenciosas
entrar en calculadora	**cor-o c**	calculadora preparada
*borrado de pantalla	**cor-356**	puesta a 0
prepararse para recibir valor de x	**cor-16 cor-16 1/2 cor-e**	pausa: introduzca datos, cor-e para terminar uno dividido dos (valor de x) pausa fin
leer el valor asignado a x	**cor-v cor-e cor-k**	macros habladas: cero coma cinco (valor) macros silenciosas
guardar valor de x en su memoria	**cor-sx**	memoria x correcto
introducir fórmula de definición	**3*(x^2)+2**	... ($3x^2$+2)
leer la expresión escrita hasta el presente	**cor-c**	...
deletrear la expre. escrita hasta el presente	**cor-25**	...
(posibles rectificaciones de escritura)	**...**	...
calcular valor actual	**cor-e**	dos coma siete cinco (valor)
salir de la calculadora	**cor-z**	salida
finalizar macro de definición	**cor-n**	macro fin

Se ha utilizado «cor-16» dos veces, precisamente para poder introducir más de un carácter, y poder así asignar a «x» (o la variable que sea) valores fraccionarios, decimales, expresiones, etc.

Al ejecutarla, con «cor-j y», tras «decir el mensaje», queda a la espera de que introduzcamos el valor de «x» y pulsemos «cor-e». Si está «silenciada», lo siguiente que oiremos es el valor que ha tomado la función, que es el que se encuentra «en la pantalla de la calculadora» y en «Papelera».

Mucho más vale aquí la recomendación de «mensaje breve», y, si es posible,

evitar lecturas y correcciones inútiles al escribir la función.

Funciones en dos variables

Construyamos un ejemplo de función con dos variables, en su forma más sencilla:

cor-n f cor-k cor-o c cor-356 3*a+4*b **cor-vcor-c cor-e cor-z cor-n**

Al probarlo para a=1 y b=0, resulta:

1 cor-e cor-s a	**0 cor-e cor-s b**	**cor-j f**

responde: «tres». Si hacemos a=0 y b=1, obtenemos:

0 cor-e cor-s a	**1 cor-e cor-s b**	**cor-j f**	cuatro

Introduciendo previamente «x=9» e «y=6», construye las macros correspondientes a las funciones escritas como sigue, y comprueba si el resultado es el que corresponde: (te recuerdo que una misma función puede escribirse o introducirse en distintas expresiones equivalentes)

a) a(x) = 2x-1;a(9)=17

b) b(x) = x^4-3x^3+2x; b(9)=4392

c) c(x) = (x^2-1)/(x+7);a(9)=5

d) d(x) = 4$\sqrt{x}$ +3x; d(9)=39

e) e(x,y) = 2x+0,5y; e(9, 6)=21

Viceversa: escribe en Braille la fórmula de la función definida por las cadenas siguientes, comprobándolo para x=5:

f) f(x) = 2+(x^3); f(9)=731

g) g(x) = 1/(3-root(2*x 2)); g(5)=-6,162278 ...

h) Como para una función 2x-5y+7 en dos variables una única «macro con mensajes y pausas para introducir valores» es demasiado extensa, desdóblala en dos: una para la función y otra para pedir y almacenar los valores de «x» e «y» en «sus memorias». Además, esta segunda te servirá para cualquier función en «x» e «y».

Advertencia

Estas «macros» pueden ser definidas «desde la misma calculadora». Pero sin incluir entonces «mensajes», ya que en calculadora no se admite el comando

«cor-236».

Observaciones

El resultado «hablado» -el mismo que aparece en pantalla y en papelera- está limitado por el «redondeo debido a la precisión». Sin embargo, se conserva «íntegro» («exacto») en la memoria «r».

Si deseamos incluir «insertar, copiar, en un fichero el «resultado redondeado», basta copiarlo inmediatamente; si lo deseamos «más ajustado», deberemos modificar la «precisión», allí hasta donde coincidan los «redondeos» o nos lo aconseje el sentido práctico.

Esta forma de definir funciones cuenta con la ventaja de ser independiente del fichero en que estemos trabajando: tras ejecutar la «macro», se dispone del valor de la función en «papelera»; claro que con los valores que en ese momento tengan las memorias correspondientes a las variables, o los que les demos en la «forma con introducción de valores».

Tiene el inconveniente de que la corrección de la «fórmula» sólo puede efectuarse mientras se confecciona la macro, sin disponer de los comandos de desplazamiento carácter a carácter («cor-3» y «cor-6»); y no «en la línea de definición», tal como ocurría al ejecutar «cor-o, k».

43. Comprobación de soluciones de ecuaciones

Supongamos que la resolución de un problema o la realización de un «ejercicio» exige resolver una ecuación; es decir: «hallar sus soluciones». Por ejemplo:

$12x+9 = \frac{4x+3}{5}$

Efectuadas sobre papel las oportunas transformaciones, creemos haber llegado a la solución «x=-3/4». ¿Estará bien?...

Es necesario «comprobar esta propuesta de solución», sustituyendo su valor en la ecuación original y observando si resulta una «igualdad numérica». El Braille Hablado nos puede ayudar, por lo menos de dos formas:

a) Mediante «simple sustitución» de la incógnita por la «posible solución» en cada miembro, comprobando después si esos valores coinciden. Para esto último, muy bien pueden utilizarse dos «memorias»:

descripción	1er miembro	2^{o} miembro
calcular valor de ese miembro	**12*-3/4+9 cor-e**	**(4*-3/4+3)/5 cor-e**
guardar en memoria	**cor-s a**	**cor-s k**
comparar valores		**a-k cor-e**

Si el resultado es «0», podemos aceptar ese valor de «x=-3/4» como solución

de la ecuación. Si no... ¿hemos resuelto mal la ecuación o nos habremos equivocado al introducir los cálculos?...

b) Definir sendas funciones, correspondientes a cada uno de los miembros de la ecuación original. Tenemos dos opciones:

—Definirlas en archivos diferentes, para luego evaluarlas mediante **cor-o k.** En «archivos diferentes», ya que deben estar situadas «al final del archivo» para poder ser evaluadas; si uno de los miembros fuera constante, bastaría con «un archivo».

—Definirlas como *«macros de calculadora».*

Seguiremos este segundo camino, por más general, práctico e independiente; aunque exija mayor atención al tiempo de escritura de la fórmula de definición. Entrando en calculadora con **cor-o c:**

	1er miembro de la ecuación	2o miembro de la ecuación
definir macro	cor-n a	**cor-n k**
*silenciar macro**	cor-k	**cor-k**
*borrado de pantalla**	cor-356	**cor-356**
escribir la expresión algebraica de definición de cada miembro	12*x+9	**(4*x+3)/5**
deletrear la expresión de definición	cor-25	**cor-25**
(posibles rectificaciones de escritura)	**...**	**...**
macros habladas	**cor-v**	**cor-v**
leer expresión para ese miembro de la ecuación	**cor-c**	**cor-c**
ejecutar (valor que toma ese miembro)	**cor-e**	**cor-e**
volver a silenciar macro	**cor-k**	**cor-k**
guardar en memoria los valores obtenidos	**cor-s a**	**cor-s k**
finalizar macro	**cor-n**	**cor-n**

(Las órdenes marcadas con asterisco no son imprescindibles.)

2º) Asignar a la variable la «propuesta de solución».

-3/4 cor-e cor-s x

3º) Calcular el valor que toma cada miembro de la ecuación y reservarlo en «memorias de comparación».

	1er miembro	2o miembro
evaluar cada miembro para el valor actual de la variable «x»	**cor-j a**	**cor-j k**

4º) Comparar los valores que han tomado los dos miembros de la ecuación.

Por el simple procedimiento de «restarlos»:

a-k cor-e

Si la respuesta es «cero», queda comprobado: la «solución propuesta» es correcta; de lo contrario, es de sospechar:

—la «propuesta de solución» es falsa; o

—se cometieron errores, al definir los miembros de la ecuación o al introducir el valor de la variable.

Podría repetirse el «proceso de comprobación» aquí descrito, pero es más probable que el error se halle en el «proceso escrito de resolución», que deberá revisarse en primer lugar. De hecho, la relectura de la expresión al ejecutar las «macros de definición» proporciona la posibilidad de apercibirse si se cometió en ellas error de escritura.

¿Te importaría comprobar mediante este método si son verdaderas soluciones las que se indican a continuación?:

a) x=-1/2, para $4x^2+8x+3=0$.

b) x=1/3, para $5-3x^2 = \frac{13+3x}{3}$

c) x=3, para $\sqrt{147x} = 7/3x^2$

Observaciones

El método de «comprobación mediante evaluación desde archivo para cada miembro de la ecuación exigiría: o bien entrar en calculadora tras cada evaluación y guardar los valores en las correspondientes «memorias», o bien efectuar la comparación mentalmente. Argumento más que suficiente para optar por el aquí descrito. Además, éste introduce al procedimiento para comprobación de soluciones de un sistema de ecuaciones que se contempla en la Unidad próxima.

Cuando uno de los miembros es una constante («0», por ejemplo), la «macro de definición» puede sustituirse por un simple *«salvar en memoria»* ese valor.

En la fase de definición se ha omitido la «comprobación de exactitud de la escritura de las funciones-miembro de la ecuación» (propuestas en otro lugar para «x=0» y «x=1»), tanto por considerarlas innecesarias a estas alturas de manejo de la calculadora, como por la posible dificultad de comprobación por cálculo mental; esto último, sobre todo, cuando aparezcan resultados parciales fraccionarios o decimales, números grandes, etc.

Se toman como letras para designar las «memorias de comparación» las mismas que para invocar las correspondientes «macros de definición». Es una

simple estrategia mnemotécnica.

También por razones mnemotécnicas -y de generalización ulterior, en la comprobación con sistemas de ecuaciones-, las letras «a» y «k» tienen la similitud a efectos de escritura en el teclado Braille de diferenciarse tan sólo en el «punto 3».

44. Comprobación de soluciones de un sistema de ecuaciones

La resolución de un problema o la realización de un «ejercicio» puede exigir que calculemos las soluciones de un «sistema de ecuaciones»; por ejemplo: «un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas»:

$$\begin{cases} 4x+6=1+3y, \\ 8x+6y+2=0 \end{cases}$$

Efectuadas sobre papel las oportunas transformaciones, creemos haber llegado a la solución

{x=-3/4, y=2/3}

Mientras no efectuemos la «comprobación», sustituyendo estos valores en las ecuaciones originales, observando si las tornan «igualdades numéricas» -como en el caso de una ecuación-, no podemos aceptarla como «solución del sistema». Nos serviremos para ello del Braille Hablado, que se encargará de llevar a cabo tan engorrosos cálculos:

1º) Definir funciones correspondientes a cada uno de los miembros de las ecuaciones originales.

Como se vio en la Unidad anterior para el caso de una única ecuación, resulta mucho más práctico definirlas como *macros de calculadora.*

Entrando en calculadora con **cor-o c:**

	primera ecuación		*segunda ecuación*	
descripción	1er miembro	*2*° miembro	1er miembro	*2*° miembro
definir macro	**cor-n a**	**cor-n k**	**cor-n b**	**cor-n l ***
*silenciar macro**	**cor-k***			
*puesta a 0 (borrado de pantalla)**	**cor-356 ***			
escribir la expresión algebraica de definición de cada miembro	**cor-n a**	**cor-n k**	**cor-n b**	**cor-n l ***
deletrear la expresión de definición	**cor-25 ***			
(posibles rectificaciones de escritura)	**...***			
Macros habladas	**cor-v***			
leer expresión para ese miembro de la ecuación	**cor-c***			

ejecutar (valor que toma ese miembro)	**cor-e**			
volver a silenciar macro	**cor-k ***			
Guardar en memoria los valores obtenidos	**cor-s a**	**cor-s k**	**cor-s b**	**cor-s l ***
finalizar macro	**cor-n**			

(Las órdenes marcadas con asterisco en la «Descripción» no son imprescindibles. En el ejemplo que estamos considerando tampoco serían necesarias las órdenes marcadas con asterisco en la 4ª columna: al tratarse de una constante, bastaría con «guardarla en memoria».)

2º) Asignar a las variables las «propuestas de solución»:

-3/4 cor-e cor-s x	**2/3 cor-e cor-s y**

3º) Calcular los valores que toman cada miembro de las ecuaciones, y reservarlos en las «memorias de comparación»:

	primera ecuación		*segunda ecuación*	
descripción	1er miembro	*2°* miembro	1er miembro	*2°* miembro
evaluar cada miembro para el valor actual de las variables x e y	**cor-j a**	**cor-j k**	**cor-j b**	**cor-j l** *

4º) Comparar los valores que toman los dos miembros de cada ecuación. Por el simple procedimiento de «restarlos»:

a-k cor-e	**b-l cor-e**

Si en ambos casos (ecuaciones) la respuesta es «cero», queda comprobado: las «soluciones propuestas» son correctas; de lo contrario, es de sospechar:

—las «propuestas de solución» son falsas; o

—se cometieron errores, al definir los miembros de las ecuaciones, o al otorgar los valores a las «memorias-variable».

Lo más probable es que el error se halle en el «proceso escrito de resolución», que deberá revisarse. La doble lectura de la expresión al ejecutar las «macros de definición» permite apercibirse fácilmente sobre si se cometió en ellas error de escritura.

Aquí se ha utilizado un ejemplo «suficientemente complejo»: soluciones fraccionarias y una de las ecuaciones con un miembro constante.

El método se generaliza sin dificultad para sistemas de tres o más ecuaciones. Para las *macros-miembro* y *memorias de comprobación* de cada ecuación se sugieren los pares de letras análogos a los señalados: "a-k», «b-l», «c-m», «d-n»...; resultantes de «añadir el punto 3».

¿Te importaría comprobar mediante este método si son soluciones las que se indican a continuación para los correspondientes sistemas?:

a) x=0,3, y=0,8, para {40x-20y+4=0, 30x+100y-89=0}

b) x=-1/2 , y=4, para {x^2+2y=8,25, 6x+$\sqrt{y}$ +1=0}

c) x=0,3, y=0,8. para {10x-5y+1=0, 10x+5y-8=0}

d) x=1, y=-1, z=-3, para {x+y+z+2=0, 2x+3y+4z+9=0, 3x-5y-7z=22}

Observaciones

Si se toman como letras para designar las «memorias de comparación» las mismas que para invocar las correspondientes «macros de definición», es por simple estrategia mnemotécnica.

En la fase de definición se ha omitido la «comprobación de exactitud de la escritura de las funciones-miembro de las ecuaciones» (propuestas en otro lugar para «x=0», «y=0», «x=1», «y=1»), por considerarlas innecesarias a estas alturas de escritura en la calculadora.

Es evidente que puede construirse una *macro,* incluso con *mensajes* y *pausas* para solicitar los valores de la posible solución.

45. Generación de progresiones aritméticas

Una «progresión aritmética» es una «sucesión de números», cada uno de los cuales puede obtenerse del anterior sumándole una «diferencia» o cantidad constante, ¿no? Pues veamos cómo la calculadora del Braille Hablado puede generar por sí cuantos términos deseemos, de forma cómoda y segura.

En una «progresión aritmética» hay dos elementos esenciales: el *primer término «a_1>* y la *diferencia* «d». Con sólo ellos es suficiente para construir todos los demás:

a_1
$a_2 = a_1+d$
$a_3 = a_2+d$
$a_4 = a_3+d$

Tan mecánica operación puede dejarse a la calculadora; no sólo la simple suma, sino la conservación «en memoria» de los términos sucesivos, confiando la reiteración *en manos de una macro.*

Si los términos sucesivos se almacenaran en una misma «memoria», cada uno haría desaparecer al anterior... Y puede que necesitemos obtener un número grande de ellos; quizás mayor incluso que el de «memorias».

¿Por qué no conservar en un archivo los términos que se van generando en calculadora?

1º) Preparar un *archivo almacén.* Puede servir uno ya creado, excepto *«Papelera»;* si no, lo creamos ex *novo.* Lo llamaremos, por ejemplo, **«progresando»:**

cor-o f c	introduzca el nombre
progresando cor-e	progresando abierto

Si se desea, pueden escribirse un texto *«Cabecera»* o *«Introducción».* Desde él crearemos la «macro de generación de términos de la progresión aritmética». Pero antes:

2º) Introducir los *«parámetros de la progresión».*

entrar en calculadora	**cor-o c**	calculadora preparada
introducir la «diferencia»	**4 cor-e cor-s d**	cuatro; memoria d correcto
introducir el «primer término»	**9 cor-e cor-s a**	nueve; memoria a correcto
**conservar el primer término en la «memoria acumulativa opcional»*	**cor-s z**	memoria: z correcto
volver al «archivo almacén»	**cor-z**	salida

La *«memoria de acumulación opcional»* es necesaria si en el transcurso de la generación de nuevos términos piensa utilizarse la calculadora en otras operaciones; ya que éstas modificarían el *último resultado,* que sería, al mismo tiempo, el *término anterior.*

3º) Generar el *primer término.* Situando el *cursor* en el lugar oportuno:

cor-346 c	copiar ¿de dónde? papelera correcto

(Que puede sustituirse por **cor-i cor-e,** ya que en el «fichero de inserción» se encuentra el último resultado de calculadora, siempre que no se inserte texto alguno una vez se haya salido de ella. En este caso: «9».)

4º) Creación de la *«macro generadora de términos».*

crear la macro	**cor-n a**	macro: a grabando
silenciar la macro	**cor-k**	macros silenciosas
entrar en calculadora	**cor-o c**	calculadora preparada
generar el nuevo término	**+d cor-e**	trece
**leer el nuevo término*	**cor-v cor-e cor-k**	macros habladas, trece macros silenciosas

**conservar el nuevo término en memoria opcional de acumulación*	**cor-s z**	memoria z correcto
volver al archivo	**cor-z**	salida
finalizar la macro	**cor-n**	macro: fin

Si se emplea *«memoria de acumulación opcional»,* el paso de *«generar el nuevo término»* en lugar de «+**d**» precisaría de **«z+d».**

La lectura del *«nuevo término»* puede eludirse sin problemas, ya que se efectuará al copiarlo en el archivo. Es útil si se desea conocer antes de efectuar la inserción.

5º) Insertar el «segundo término de la progresión». Situando previamente el cursor en el lugar deseado:

cor-346 c	copiar ¿de dónde? papelera correcto: trece

6º) Inserción de *términos sucesivos.* Situando el cursor en el lugar oportuno:

generación en calculadora del «nuevo término»	**cor-j a**	macro: a... (lectura del término)
copia del «nuevo término» en el archivo	**cor-346 c**	copiar ¿de dónde? papelera correcto, (lectura del nuevo término)

Ejercítate, produciendo los diez primeros términos de las siguientes «progresiones aritméticas»:

a) a_1-5,25, d=0,75.

b) a_1=3, d=2/3 (con dos decimales de aproximación).

c) a_1=1, d=1.

Observaciones

Como se indicaba más arriba, la orden de *«copia en el archivo»* **(cor-346 c)** puede sustituirse por *«inserción»,* con **cor-i cor-e** -si se realiza «inmediatamente»-, ya que el «resultado en pantalla» se transfiere tanto a *«Papelera»* como al *«fichero de inserción».* Pero aparecen problemas con la *«inserción a final de archivo»* si no se añaden *caracteres de separación.*

Las órdenes de *«generación del nuevo término»* **(cor-j a) y** *«copia en el archivo»* **(cor-346 c)** pueden separarse sin perturbación alguna. O puede omitirse la segunda, si no se desea incluir todos los términos; bien que, en este caso, será conveniente incluir la *«orden de lectura»,* marcada como opcional al crear la *macro.*

46. Generación de progresiones geométricas. «Macros de iteración automática»

Una «progresión geométrica» es una «sucesión de números», cada uno de los cuales puede obtenerse del anterior multiplicándolo por una *«razón»* o cantidad constante.

Es decir: análoga a una *progresión aritmética,* sustituyendo la adición por multiplicación.

Como para las *progresiones aritméticas,* en *una progresión geométrica* hay dos elementos esenciales: la *«razón»* «**r**» y el *«primer término»* «$\boldsymbol{a_1}$»; bastan para construir todos los demás.

a_1
$a_2 = a_1 x r$
$a_3 = a_2 x r$
$a_4 = a_3 x r$

La calculadora realizaría sin dificultad esos productos. Y, como para las *progresiones aritméticas,* una *macro* facilitaría la generación de «nuevos términos»: bastaría sustituir «+» por «*» en la descrita para estas últimas.

Iremos más lejos: se creará una *«macro generadora»* que no sólo *producirá nuevos términos* por sí sola, sino que también los *incorporará al archivo almacén,* hasta que se ordene su interrupción.

1º) Fase preparatoria.

**crear el «archivo almacén» «progresando»*	**cor-o f c progresando cor-e**	introduzca el nombre: progresando abierto
entrar en calculadora	**cor-o c**	calculadora preparada
introducir la «razón» «x»	**2 cor-e cor-s x**	dos memoria x correcto
introducir el «primer término»	**3 cor-e cor-s y**	tres memoria y correcto
introducir el «ante-primer término»	**y/x cor-e cor-s z**	uno coma cinco memoria: z correcto
**inicializar la «memoria suma»*	**0 cor-e cor-s s**	cero memoria s correcto
volver al «archivo almacén»	**cor-z**	salida

No es estrictamente necesario crear un nuevo archivo para recoger los términos de la progresión. De no hacerlo, éstos se agregarían en el archivo de partida.

Tampoco es necesaria la *memoria suma* «s». Pero con frecuencia se debe también calcular esta suma, y puede así obtenerse simultáneamente sin recurrir a la fórmula (que fácilmente se olvida). De no incluirse, se ahorraría tanto la penúltima línea de esta fase como otras dos en la próxima.

El extraño valor conferido inicialmente a la *memoria de último término* «z» (y/x), cociente entre el *primer término* y la *razón* tiene por finalidad que, al ejecutarse

por primera vez la *«macro de generación de nuevos términos»* (ya durante la creación; ver siguiente apartado) y multiplicar por la *razón* «x», aparezca el *primer término* «y».

2º) Creación y puesta en marcha de la *«macro generadora de términos».*

crear la macro	**cor-n p**	macro: p grabando
silenciar la macro	**cor-k**	{macros silenciosas}
entraren calculadora	**cor-o c**	{calculadora preparada}
generar un nuevo término	**z*x cor-e**	{tres} (3, 6,12,24...)
leer el nuevo término	**cor-v cor-e cor-k**	{macros habladas} ... (3, 6, 12, 24...) {macros silenciosas}
conservar el nuevo término en «memoria de último término»	**cor-s z**	{memoria z correcto}
**sumar el nuevo término a la «suma opcional», y reponer en pantalla el «nuevo término»*	**+s cor-e cor-s s z cor-e**	{... memoria s correcto...} (nuevo / último término)
reponer en pantalla el último / nuevo término	**z cor-e**	{tres} (6, 12,24...)
volver al archivo-almacén	**cor-z**	{salida}
**nueva línea*	**cor-46**	{control m}
incorporar el nuevo término al «archivo almacén»'	**cor-346 c**	{copiar: ¿de dónde? papelera} correcto
repetir órdenes por «auto invocación»	**cor-j p**	{macro: p correcto}

Si no se desea obtener la *«suma de términos»,* es innecesaria la *«reposición en pantalla del último término».*

Las verbalizaciones encerradas entre llaves sólo se efectúan durante la creación, quedando silenciadas por **cor-k** en las ejecuciones automáticas sucesivas.

La última orden, por la que la *macro se invoca a sí misma,* reitera automáticamente todos los pasos a partir de la segunda línea.

La lectura del *nuevo término* es aquí conveniente (si no necesaria), para conocer los términos que se van generando, y poder interrumpir en el momento deseado.

3º) Interrumpir la generación de términos.

Interrupción de la "autoinvocación"	**cor-z**	cancelar. Progresando uno página

Ejercítate, produciendo los diez primeros términos de las siguientes «progresiones aritméticas», en las dos versiones: calculando la suma de términos y -simplificada- sin ésta.

a) $a_1 = 1$, $r=2$

b) a_1=3, r=1/3 (con dos decimales de aproximación).

c) a_1=2,25, r=-1.

d) Seguro que eres capaz de construir una *macro* incluyendo *mensajes* y *pausas* para pedir e introducir el «primer término» y la «razón»...

Observaciones

Para la *razón* se ha tomado la *memoria* x, «r» es la *memoria del último resultado,* cambiante con cada *nuevo término,* cuanto menos, «r», por tanto, es inhábil para cualquier valor a conservar.

La *memoria de último término* es conveniente aunque no se calcule la *suma acumulativa:* si se interrumpe la generación de nuevos términos, y se hace uso de la calculadora en otras operaciones, éstas modificarían el *último resultado,* que sería, al mismo tiempo, el *término anterior.* Gracias a «z» puede reanudarse la generación en el término que se detuvo.

47. índices y sucesiones generales

Entre los ejercicios propuestos para la generación de términos de una progresión aritmética (Unidad 45) figuraba uno correspondiente a la que podríamos llamar «la progresión aritmética por excelencia»: «a_1=1, d=1». Se generan con ella los números naturales a partir del «1»: «1, 2, 3, 4...»

Aplicando ahora una *macro continua* del tipo empleado para generar progresiones geométricas, los números naturales aparecerían uno tras otro, en líneas separadas, si así lo deseamos. Cual *cabeceras de línea:*

entrar en calculadora	**cor-o c**	calculadora preparada
introducir el «anteprimer/último término»	**0 cor-e cor-s n**	cero memoria: n correcto
volver al «archivo almacén»	**cor-z**	salida
crear la macro generadora de índices	**cor-n n**	macro: n grabando
silenciar la macro	**cor-k**	{macros silenciosas}
entrar en calculadora	**cor-o c**	{calculadora preparada}
generar un nuevo término	**n+1 cor-e**	{...}(1,2,3,4...)
leer el nuevo término	**cor-v cor-e cor-k**	{macros habladas} ... (1, 2, 3, 4...) {macros silenciosas}
conservar el nuevo término en «memoria de último término»	**cor-s n**	{memoria n correcto}
volver al archivo	**cor-z**	{salida}
**nueva línea*	**cor-46**	{control m}
incorporar el nuevo término al «archivo almacén»	**cor-346 c**	{copiar: ¿de dónde? papelera} correcto

repetir órdenes por «autoinvocación»	cor-j n	{macro: n correcto}

Incluso podría prescindirse de la *«memoria* **n** *de último término»:* bastaría *entrar en calculadora* y sumar una unidad al *valor en pantalla.* Pero este formato permite disponer en la memoria «n» de un índice, útil en lo que sigue, con independencia de incluirlo o no en un *«archivo almacén».*

Para interrumpir la generación de términos, bastaría con pulsar **cor-z.**

Veamos una aplicación: la generación mediante una de estas *macros indexadas* de los términos de una *sucesión.*

Una «sucesión» *{real)* es una *aplicación* de *dominio N»* (e *imagen R»).* Su *término general* puede venir definido por una *fórmula algebraica, función de n;* por ejemplo:

$(1+1/n)^n$

Entre otros, podríamos seguir dos caminos:

a) Preparar sendas *macros»:* una, generadora uno a uno de los *índices* «n»; la otra, como *función personal en n* (ver Unidad 42), para calcular el valor del correspondiente término de la sucesión:

Generación de un nuevo índice

entrar en calculadora	**cor-o c**	calculadora preparada
introducir el «ante primer índice»	**0 cor-e cor-s n**	cero memoria: n correcto
volver al «archivo almacén»	**cor-z**	salida
crear la macro generadora de índices	**cor-n n**	macro: n grabando
silenciar la macro	**cor-k**	{macros silenciosas}
entrar en calculadora	**cor-o c**	{calculadora preparada}
generar un nuevo índice	**n+1 cor-e**	**{...}(1,2, 3, 4...)**
leer el nuevo término	**cor-v cor-e cor-k**	{macros habladas} ... (1, 2, 3, 4...) {macros silenciosas}
conservar el nuevo índice en «memoria de índices»	**cor-s n**	{memoria n correcto}
volver al archivo	**cor-z**	{salida}
**nueva línea y cabecera opcional*	**cor-46 a**	{control m a}
incorporar el nuevo índice al «archivo almacén»	**cor-346 c**	{copiar: ¿de dónde? papelera} correcto
**Caracteres opcionales*	**=**	{igual}
finalizar macro generadora de índices	**cor-n**	{macro fin}

Construcción de la función en n para el término general

iniciar macro	**cor-n, y**	definir macro y (letra de definición) grabando
**silenciar macro*	**cor-k**	{macros silenciosas}
entrar en calculadora	**cor-o c**	{calculadora preparada}
**borrado de pantalla*	**cor-356**	{puesta a 0}
introducir fórmula de definición	**1+1/n*n**	{...}
**releer la fórmula introducida*	**cor-c**	{uno signo de sumar uno barra ene acento circunflejo ene}
(posibles rectificaciones de escritura)	**...**	{...}
calcular el valor para índice n actual	**cor-e**	{...}
salir de calculadora	**cor-z**	{salida}
finalizar macro	**cor-n**	{macro fin}
incluir valor del término en el archivo	**cor-346 c**	copiar: ¿de dónde? papelera correcto

(La expresión aquí recogida para la fórmula de definición del término general se ajusta a la *sintaxis de la calculadora del Braille Hablado.* Ver: Unidad 37.)

b) Diseñar una *macro continua,* que realice simultáneamente estos dos cálculos y los vaya agregando al *archivo-almacén:*

entrar en calculadora	**cor-oc**	calculadora preparada
introducir el «anteprimer/último índice»	**0 cor-e cor-s n**	cero memoria: n correcto
volver al «archivo almacén»	**cor-z**	salida
crear la macro generadora de índices y términos	**cor-n a**	macro: a grabando
silenciar la macro	**cor-k**	{macros silenciosas}
entrar en calculadora	**cor-o c**	{calculadora preparada}
generar un nuevo índice	**n+1 cor-e**	{...(1,2,3,4...)}
leer el nuevo término	**cor-v cor-e cor-k**	{macros habladas} ... (1, 2, 3, 4...) {macros silenciosas}
conservar el nuevo índice en «memoria de último índice»	**cor-s n**	{memoria n correcto}
volver al archivo	**cor-z**	{salida}
nueva línea y cabecera	**cor-46 a**	{control m a}
incorporar el nuevo índice al «archivo almacén»	**cor-346 c**	{copiar: ¿de dónde? papelera} correcto
caracteres adicionales	**=**	{espacio Igual espacio}
entrar en calculadora	**cor-o c**	{calculadora preparada}
introducir fórmula de definición	**1+1/n^n**	{...}
releer la fórmula introducida	**cor-c**	{uno signo de sumar uno barra ene acento circunflejo ene}
(posibles rectificaciones de escritura)	**...**	{...}

calcular el valor para índice n actual	**cor-e**	{... (2, 2,25, 2,37,...)}
salir de calculadora	**cor-z**	{salida}
incluir valor del término en el archivo	**cor-346 c**	{copiar: ¿de dónde? papelera correcto}
calcular nuevos índices y términos por «autoinvocación»	**cor-j a**	{macro: a correcto}
interrumpir generación de índices y términos	**cor-z**	macro: fin. Correcto

Evidentemente, bastaría en uno y otro caso sustituir la *fórmula de definición* del *término general,* para generar cuantos términos se deseen en otras sucesiones.

Como ejercicio, intenta construir por ambos procedimientos los diez primeros términos de las siguientes sucesiones:

a) $s_n=(6n+1)/(4-2n)$

b) $x_n=(a+bn)/(c+dn)$, fijando tú previamente los valores de «a», «b», «c» y «d» *{sucesión hipergeométrica).*

c) *Sucesión de Fibonacci:* los dos primeros términos son «1» y «1», y cada uno de los posteriores es suma de los dos que le preceden.

d) Una sucesión en la que cada término sea suma de los tres anteriores, siendo los tres primeros: «1», «1», «2».

e) Construye una *macro* con mensaje y pausa para pedir la «fórmula de definición». Así tendrás la *macro* para *construir términos de cualquier sucesión.* Aunque... si es demasiado extensa, desdóblala en otras dos.

48. Factorial. La función «fact»

¿Cuántas banderas tricolores diferentes pueden diseñarse en tres bandas horizontales iguales, empleando los colores verde, blanco y rojo?

El problema se reduce a *permutar* o *cambiar de posición* estos tres colores. Se trataría, pues, de *«permutaciones de 3 elementos»:*

—Para la banda superior (o *primer elemento),* podemos elegir uno cualquiera de los tres colores dados.

—Para la banda intermedia (o *segundo elemento),* uno de los dos aún disponibles. Por tanto, llevamos: 3x2 = 6 configuraciones posibles.

—Para la banda inferior (o *tercer elemento),* sólo nos queda una posibilidad: el color aún no empleado; luego son: 3x2x1 = 6 banderas diferentes.

Si ahora nos plantearan un problema análogo: «¿y con cinco colores, para banderas de cinco bandas horizontales?»... Poco costaría hallar la respuesta: 5x4x3x2x1. Ya que disponemos de cinco colores posibles para la banda superior, cuatro para la segunda, tres para la central, etc.

Estos productos tan singulares, formados por factores que disminuyen de unidad en unidad a partir de un número dado hasta la unidad misma, reciben un nombre especial: *«factoriales».* Responden al cálculo o expresión del *número de permutaciones entre los elementos de un conjunto.* Por ser muy comunes, merecen una notación simbólica propia.

El «factorial» de un número entero positivo, designado por escrito adjuntando el signo «!»(en Braille: ⠖, puntos 45,3), es la simbolización de un producto:

3! = 3x2x1 5! = 5x4x3x2x1 1! = 1

Coherente con las propiedades que se deducirían «a posteriori», un «convenio»:

0! = 1

Estos cálculos resultarían triviales para la calculadora del Braille Hablado. Pero también cuenta con una función propia que los simplifica:

3!	**fact(3) cor-e**	seis
5!	**fact(5) cor-e**	ciento veinte
1!	**fact(1) cor-e**	uno

Pero no válida para «0»:

0!	**fact(0) cor-e**	error: argumento inválido para la función

Aunque la *sintaxis* de **fact** es análoga a la de las demás funciones de la calculadora del Braille Hablado, bueno será recordarlas:

—Es indiferente escribir **fact** en minúsculas o mayúsculas.

—No deben aparecer «espacios en blanco» entre las letras, paréntesis, números y signos de operaciones que integren la expresión.

—Como *argumento* (número al que se aplica el «factorial») puede emplearse una expresión cualquiera, que será evaluada por la calculadora; pudiendo incluir *letras para valores de memorias.* Con la condición de *resultado entero positivo.*

49. Números combinatorios

¿Tienes claro qué son las «combinaciones de m elementos tomados de n en n»?

Una respuesta válida a esta pregunta, podría ser:

—El número de subconjuntos de n elementos que se pueden formar con los m elementos de un conjunto.

Como se trata de *subconjuntos,* **no importa el orden** en que se den sus elementos.

Al número «m» -número de elementos del conjunto total- se llama *numerador* o *rango* y *orden* a «n» -número de elementos de cada subconjunto-.

¿Y cuántas son, cómo se calculan? No te contaré aquí la historia de «variaciones», «permutaciones», etc. Llegando al final, simplemente te recuerdo que:

El número de «combinaciones de m elementos tomados de n en n» es igual a:

$C_m^n = \binom{m}{n}$ = m(m-1)(m-2)...(m-n+1)/n! = m!/(n!(m-n)!)

A esa expresión $\binom{m}{n}$ (en Braille: ⠷⠍⠆⠝⠾) se le llama «número combinatorio», y las expresiones de ese tipo tienen ciertas propiedades, muy curiosas e interesantes. Pero eso es otra historia...: aquí nos interesa cómo calcular su valor de la forma más rápida y segura.

1ª) Visto que el *factorial de un número* puede ser calculado directamente por la calculadora mediante la función **fact,** sería:

$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$	**fact(m)/(fact(n)*fact(m-n))**

Lo que obliga a que calcules «m-n» por tu cuenta, y a introducir toda esa retahíla cada vez que quisieras calcular un número combinatorio.

Así, si queremos calcular $\binom{6}{4}$, tendríamos que escribir en la calculadora:

fact(6)/(fact(4)*fact(2)) cor-e	quince (15)

Pero..., ¿para qué están las *macros* y las *variables de memoria'?...* Sirviéndonos de éstas, bastaría con:

2ª) Construir una *macro en calculadora* que evitara repetir el teclear toda esa ristra de caracteres (y el consiguiente riesgo de errores de pulsación) cada vez que quisiéramos calcular un *número combinatorio;* asignando *variables-memoria* al *numerador* y al *orden.*

Después, cada vez que quisiéramos calcular un *número combinatorio,* ejecutar esa *macro,* guardando previamente en las *memorias-variable* los valores

correspondientes.

Es decir: salvo las operaciones de *«introducir valores en las memorias elegidas»,* «hacer las cosas de una vez por todas».

A fin de cuentas: se trata de *considerar un número combinatorio como una función de dos variables.*

Entrando en calculadora:

definir la «macro»	**cor-n c**	{definir macro c (u otro carácter) grabando}
silenciar la «macro»	**cor-k**	{macros silenciosas}
**borrar la pantalla*	**cor-356**	{puesta a cero}
introducir la «etiqueta» en forma de «mensaje»	**cor-236 combinaciones m n**	{mensaje: combinaciones m n}
**leer la etiqueta*	**cor-v cor-c**	{macros habladas} combinaciones m n
** finalizar el mensaje-etiqueta y volver a silenciar las operaciones*	**cor-k cor-356**	{macros silenciosas. Puesta a cero}
fórmula de definición	**fact(m)/(fact(n)* *fact(m-n))**	{...}
efectuar el cálculo, leyéndolo	**cor-v cor-e**	{macros habladas} ...
finalizar la macro	**cor-n**	{macro fin}

Claro que, para calcular el número de combinaciones de un cierto «orden» a formar con elementos de un cierto conjunto, habrá que introducir en las memorias «m» y «n» los valores de su *numerador* y *orden:*

borrar el contenido de pantalla	**cor-356**	puesta a cero
introducir el numerador y guardarlo en memoria	**m cor-e cor-s m**	m (numerador) memoria: m correcto
introducir el orden y guardarlo en memoria	**n cor-e cor-s n**	n (orden) memoria: n correcto

Sería ahora suficiente *ejecutar la macro* c, para obtener el valor buscado.

Una vez construida esta *macro de función en dos variables,* calcula los siguientes números combinatorios, intentando primero hallarlos por cálculo mental:

a) $\binom{6}{3}$; b) $\binom{10}{3}$; c) $\binom{20}{19}$

Escribe en papel los números combinatorios que en la calculadora se introducirían (sin nuestra «macro»):

d) **fact(5)/(fact(2)*fact(3))**

e) **fact(6)/(fact(0)*fact(6))**

Por cierto: introduce esta última expresión en la calculadora, a ver qué pasa. Y calcula tú esos valores. ¿Deduces algo... «especial»?

Advertencia

La calculadora del Braille Hablado no admite para la función **FACT (***factorial)* argumentos nulo, negativos o fraccionarios.

Observaciones

Como es evidente, el carácter de definición de la *macro* y las letras correspondientes a las *memorias de numerador y orden* son arbitrarios. Bien que no puede emplearse la memoria «r», reservada para el último resultado.

Debido al excesivo tamaño resultante, no se puede construir una *macro* con posibilidad de *«introducir los datos mediante mensajes y pausas»* de presentación global y elegante. Si bien es posible construir una *"macro para asignar valores al numerador y al orden»* y ejecutar después la que efectúa el cálculo.

50. El número «e». Exponenciales. La función «exp»

En la unidad 47 se utilizó como ejemplo una sucesión un tanto extraña:

$(1+1/n)^n$

Puede demostrarse que se trata de una sucesión *creciente* y *acotada.* Lo que implica que es *convergente* -tiene *límite*- en el conjunto de los *números reales,* entre «2» y «3». Pero su *límite* no es un *número racional:* no puede expresarse mediante una fracción; puede aproximarse con expresiones decimales, pero nunca determinables mediante una ley...

A este *límite,* a este número real al que la sucesión se aproxima cuanto queramos, se le designa por la letra «e». Su valor... Un valor aproximado nos lo proporciona la calculadora del Braille Hablado, con una aproximación de *hasta 11 cifras decimales,* según la *«Precisión»* que fijemos. Para ello:

exp(1) cor-e	2,71828182837

Este número «**e**» juega un papel importante en la Matemática Superior, como «**л**» en la Geometría Elemental. En la próxima Unidad tendrás oportunidad de ver algún ejemplo; incluso más abajo.

Y acaba de aparecer una nueva función de la calculadora científica: la función **exp,** llamada *«exponencial».* Está relacionada con la función *«potencia»,* **power:**

e^x	**exp(x)**	**power(exp(1) x)**

Claro que si intentas comparar los valores de ambos miembros en la calculadora del Braille Hablado, encontrarás una *pequeña diferencia,* debida a la aproximación que emplea para «**e**» **(exp(1)):**

x	**exp(x)**	**power(exp(1) x)**	**error abs.**	**error rel.**
0	0,99999999996	1	4.022E-11	4,02E-09%
1	2,71828182837	2,71828182837	0	0%
2	7,389056098758	7,389056098444	3'14E-10	4,24E-09%
5	148,4131591031	148,4131590782	2.492E-08	1,68E-08%
10	22026,46579424	22026,46578756	6.68E-06	3,03E-08%
20	485165195,3907	485165195,0905	0,30019	6,19E-08%

Para calcular *«exponenciales de base distinta de e»,* se recurre a **power;** siempre con *base positiva, o base negativa y exponente entero:*

10^x	**power(10x)**
a^x	**power(a x)**

Aunque en la Unidad próxima veremos otra forma de calcularlas, utilizando **exp.**

Calcula:

a) e^6; b) 6^e; c) e^n;

d) Mediante *macro,* construye la función e^{nx}, y calcula sus valores para x=1, 2, 3, 4 y 5.

51. Logaritmos y funciones logarítmicas. Las funciones «log», «ln», «alog» y «aln»)

Dado dos números positivos «b>0» *-base-* y «x>0», se llama *«logaritmo de **x** en base b»* al exponente al que debe elevarse «b» para obtener **«x»:**

$y = Log_b x <=> x = b^y$

Si «y» es el *«logaritmo en base b de x»,* «x» recibe el nombre de *«antilogaritmo de y en base b».* Es cuestión de nombres: logaritmo-exponente, antilogaritmo-número (potencia).

En particular: al *«logaritmo en base 10 de un número»* se le llama *«logaritmo decimal»,* y al *«logaritmo en base e» «logaritmo neperiano».* Tienen notaciones escritas también particulares:

$\log_{10}p = \log p$
$\log_{e}p = \ln p$

La calculadora del Braille Hablado cuenta con estas dos funciones. Como es habitual:

—Es indiferente emplear mayúsculas o minúsculas.

—No deben aparecer ni el punto de abreviatura ni «espacios en blanco».

—El *argumento* (aquí: número del que se calcula el *logaritmo»)* debe ir encerrado entre paréntesis.

Y -como era de temer-, aparecen «pequeños errores», apreciables cuando se toma «Precisión 12»:

expresión	calculadora	valor teórico	error abs.	error rel.
log(100)	2,000000001263	2	1,26E-09	6,32E-10%
log(0,1)	-0,999999999209	-1	7,91 E-10	7,91E-10%
log(10)	0,999999999216	1	7.84E-10	7,84E-10%
ln(10)	2,302585091194	...	...	...%
ln(exp(1))	0,999999997603	1	2.40E-09	2,40E-09%

Al igual que para las funciones **power** (potencia), **root** (raíz) y **exp** (exponencial), **log** y In tienen en la calculadora un *algoritmo de cálculo por aproximación* semejante al del *límite de una sucesión* (en concreto: *límite del desarrollo en serie de Taylor).* Algo así como *un polinomio con infinitos términos,* del que sólo puede utilizar unos cuantos. Cada calculadora y programa informático tiene su propia aproximación, según cuántos de estos términos emplee.

Generalización. Mediante una *macro* pueden construirse funciones para obtener *«logaritmos en cualquier base».* Por ejemplo, para la base «a=2», resultaría:

$\log_2 x = y \iff x = 2^y \iff \log y = x\log 2 \iff x = \log y/\log 2$

gracias a una de las propiedades de los logaritmos. Luego:

$\log_2 x = \log x/\log 2$

Ya puedes construir la función *«logaritmo en base 2».*

¡Adelante!

Antilogaritmos

Como se indicaba más arriba, el *antilogaritmo* «y» de un número «x» es aquel

número «y» igual a la potencia -en la *base* correspondiente- de exponente (o *logaritmo)* «x»:

$alog_b x = y <=> y = b^x <=> y = b^{log_b\ y} <=> alog_b x = b^x$

Podríamos decir que *la función antilogarítmica es la inversa de la función logarítmica.* Y, como puedes observar en la última de las expresiones anteriores, coincide con la *función exponencial.* Por tanto:

$alog_b x = b^x$ = power(b x)

La calculadora del Braille Hablado puede calcular directamente ciertos *antilogaritmos:* los *decimales* (en base 10) y los *neperianos* (en base **«e»):**

alog(2) cor-e	100 (=10^2)
alog(-3) cor-e	0,001 (=10-3)
aln(1) cor-e	2,71828182837 (=exp(1))

Calcula:

a) log21; b) ln21; c) $log_5(0,0016)$; d) aln10; e) $alog_4(-3)$.

f) ¿Podrías construir una *macro de función,* con *mensajes* y *pausas* que te pidiera la *base* y el *número del que quieres obtener el logaritmo en esa base?* Si ves que es demasiado extensa, desdóblala en otras dos.

Advertencia

No pueden obtenerse *logaritmos de números negativos:*

log(-100) cor-e	error: argumento inválido para la función
ln(-1) cor-e	error: argumento inválido para la función

Ya que tanto 10^x como e^x serán números positivos para cualquier valor de x.

52. Funciones «circulares» o «trigonométricas». Cambio entre medias sexagesimales y radianes

En la *librería* de la calculadora del Braille Hablado se encuentran las más importantes de las llamadas *funciones circulares* o *funciones trigonométricas:*

función	sintaxis
seno	**sin(x)**
coseno	**cos(x)**
tangente	**tan(x)**
cotangente	**cot(x)**
arco seno	**asin(x)**
arco coseno	**acos(x)**

arco tangente	**atan(x)**

Las restantes, serían:

función	notación	equivalencia
secante	sec	**1/cos(x)**
cosecante	CSC	**1/sin(x)**
arco cotangente	acot	**atan(1/x)**
arco secante	asec	**acos(1/x)**
arco cosecante	acsc	**asin(1/x)**

De usarse frecuentemente, pueden construirse unas sencillas *macros-función* de calculadora (ver Unidad 42), o cálculos puntuales mediante el comando OK (ver: Unidad 41, «cálculos en archivo»).

Pero, al intentar utilizar una de estas funciones -dentro o fuera de la calculadora-, podemos llevarnos sorpresas:

seno de 30° (=1/2)	**sin(30) cor-e**	-0,988 (?)
coseno de 90° (=0)	**cos(90) cor-e**	-0,4481 (?)
arco tangente de 1 (=45°)	**atan(1) cor-e**	0,7854 (?)

¡Qué raro, ¿no?

Te sugiero que pulses **cor-d,** y repitas los cálculos:

...	**cor-d**	grados
seno de 30° (=^{1}/2)	**sin(30) cor-e**	0,5
coseno de 90° (=0)	**cos(90) cor-e**	0
arco tangente de 1 (=45°)	**atan(1) cor-e**	45

Si pulsas **cor-r,** oirás

	cor-r	radianes

Entre otras, existen dos formas distintas de *medir ángulos:*

Tomando como unidad el *grado sexagesimal* (1/90 del *ángulo recto)*

Tomando como unidad el *radián* (1/2л del *ángulo completo* o *circunferencia).*

Cuando en la calculadora se pulsa **cor-d,** entiende que las medidas de ángulos que le introduzcamos serán *grados sexagesimales* ("d", del inglés *degree,* grado); si se pulsa **cor-r,** entiende que esas medidas son *radianes.* Éste era nuestro problema: la última vez que estuvimos en calculadora, queriendo o no, habíamos pulsado **cor-r.**

He aquí algunas equivalencias entre medidas angulares:

ángulo	Notación sexagesimal (expresión compleja)	Expresión sexagesimal para calculadora (decimal)	Notación en radianes	Expresión en radianes para calculadora
ángulo recto	90°	**90**	л /2 rad	**pi/2**
1/2 recto	45°	**45**	л /4 rad	**pi/4**
1/3 recto	30°	**30**	л /6 rad	**p¡/6**
2/3 recto	60°	**60**	л /3 rad	**pi/3**
1/4 recto	22°30'	**22,5**	л */8* rad	**pi/8**
1/90 recto	1°	**1**	л /180 rad	**pi/180**
1/5400 recto	1´	**0,01**	л /10800 rad	**pi/10800**
1/324000 recto	1"	**0,0001**	л /648000 rad	**pi/648000**
1/11 recto	8°10'54'5"	**8,181818**	л /22 rad	**pi/22**
2/л rectos	57°17'44,8"	**57,295779**	1 rad	**1**

Comprueba tus conocimientos: calcula

a) seno de 36°45'

b) tangente de 0,5 rad

c) arco cuyo seno es $\sqrt{2}$

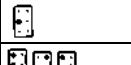
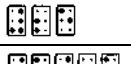
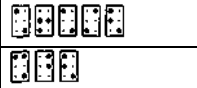
d) ¿Cuál es la medida en radianes de un ángulo que mide 15°15'15"?

Advertencia

La calculadora del Braille Hablado *conserva el tipo de medida de ángulos.* Por tanto, antes de utilizar las *funciones circulares* conviene asegurarse del *modo* o *unidad angular* a emplear, pulsando **cor-d** o **cor-r,** fijando el que nos convenga.

ANEXO

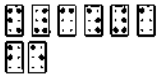
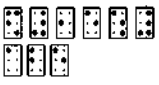
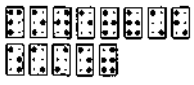
Tabla comparativa de notaciones braille - calculadora B.H.

concepto	escritura en papel braille			calculadora del B.H.	
	tinta	braille			
		símbolo	códigos	pulsación	teclas
uno	1		3456,1		16
dos	2		3456,12		126
tres	3		3456,14		146
cuatro	4		3456,145		1456
cinco	5		3456,15		156
seis	6		3456,124		1246
siete	7		3456,1245		12456
ocho	8		3456,125		1256
nueve	9		3456,24		246
cero	0		3456,245		346
suma	+		235		235
resta	-		36		36
por (multiplicar)	x •		236		256
dividido por (partido)/::	÷ :		256		34
igual	=		2356		2356
coma	,`		2		2
fracción	2/5		..		.34
núm. mixto	1 1/2		..		
potencia entera	3^2		.,16,.		.,45,.
potencia general	$3^{-0/5}$		.,16,.		
raíz cuadrada	$\sqrt{81}$		1246,156,.		.,cor -345
abrir paréntesis	(		126		12356

ANEXO

Tabla comparativa de notaciones braille - calculadora B.H.

(continuación)

concepto	escritura en papel braille			calculadora del B.H.	
	tinta	Braille			
		símbolo	códigos	pulsación	teclas
cerrar paréntesis	)		345		23456
abrir paréntesis auxiliar			26		12356
cerrar paréntesis auxiliar			35		23456
porcentaje	10%		.,456,356		.,456
raíz cúbica	$\sqrt[3]{125}$		1246,3456, 14,156,.		.
raíz n-ésima	$\sqrt[1/5]{125}$				..
factorial	5!		.,45,3		
número pi	***л***		4,1234		..
sumatorio	∑		45,234,156		

Volver al Índice / Inicio del Capitulo

4. PEQUEÑA LUDOTECA

Los juegos ejercicios que se proponen a continuación se presentan, por lo general, como «enunciados con unos parámetros iniciales». Basta modificar éstos, para obtener «variantes del mismo juego» que alterarían su duración y dificultad en varios aspectos. Incluso es conveniente que, en una segunda fase, los valores se dejen a la discusión y elección de los jugadores, fijando las «reglas» de nuevos juegos. No obstante, tras el enunciado, se ofrecen algunas *variantes modelo* del correspondiente juego.

Por lo general, toman la forma de *juego para varios jugadores,* con un mayor ingrediente de competitividad, desafío y estímulo para la propia superación, medida del progreso personal, etc. Pero fácilmente se transforman en *solitarios* o en *juegos para un solo jugador* (bajo la dirección de un «juez»).

Las anotaciones de «puntos» o números de cualquier tipo no será preciso escribirlas: a partir de un cierto momento, bastará con conservarlas y acumularlas en *memorias* de la calculadora. Asimismo, las *tarjetas* mencionadas en alguno de los juegos pueden sustituirse por simples *puntos.* Sin embargo, a pesar de esta forma de subrayar la exclusiva dependencia de la calculadora, la utilización de material de escritura y otros elementos auxiliares contribuye a dar variedad a un juego.

La referencia a *cronómetro* no debe entenderse en sentido literal: un control de tiempo aproximado, por un «juez», «director del juego» o los propios jugadores. Pero, al contar el Braille Hablado con *cronómetro propio,* ¿por qué no aprovecharlo»? ¿O el *aviso horario,* poniendo como *variable* la cifra de las unidades para los minutos?

Al hablar de **«operaciones»,** se ajustarían a las conocidas por los alumnos en el momento o nivel de uso de la calculadora. **«Fact»,** de «factorial», podrá, pues, entenderse como **«operación»,** al igual que **«sqrt»** *{raíz cuadrada),* «^» (45: *elevado* a), etc.

Para los juegos en que intervengan *números con coma,* hay que prever las dificultades que pudieran surgir con el *número de cifras decimales,* modificando la **«Precisión».**

Cuando en alguno de los enunciados o *variantes* se haga referencia a *paréntesis,* debe entenderse que serían **«paréntesis de la calculadora del Braille Hablado».** En unos casos, se corresponderán con *paréntesis escritos* para la expresión con igual resultado; en otros, equivaldrían a *paréntesis auxiliares Braille;* otros, por último, exigidos por ciertas operaciones o signos de la calculadora.

En el caso de *varios jugadores* será preferible que cada uno de ellos cuente con su propia calculadora. De disponerse de un único aparato, el hecho de compartirlo tampoco supondría una modificación esencial.

Podrá discutirse si estos juegos son *verdaderos juegos para calculadora.* En

efecto: un buen número de ellos coinciden con *juegos de cálculo mental, "pasatiempos», ejercicios de combinatoria con lápiz y papel...*

La réplica es inmediata: ¿qué actividad en matemáticas no implica un ejercicio de cálculo mental? ¿o cuál no podría realizarse con lápiz y papel?

Por una parte, se toman como excusa «para ejercitarse en. el uso de la calculadora», incorporando un ingrediente lúdico. Por otro, la calculadora se utiliza como «instrumento auxiliar», que agilizará los cálculos, facilitará los ensayos, permitirá comprobaciones seguras y rápidas. Algunos de los juegos serían casi impensables sin su ayuda (ver: «Decimales»), o exigirían una retentiva poco común (ver: «Funciones»). Finalmente: otros, que serían ramplones ejercicios combinatorios con lápiz y papel, se complican al tener que realizarlos en la calculadora (ver: «Escritura de números», o «Decimales»).

No se duda que el lector, con su imaginación y pericia, puede sugerir una pléyade de nuevos juegos, o tenga noticia de otros, publicados en manuales, antologías, revistas, almanaques... Si los difunde, quedamos agradecidos todos los mat-jugadores y la matemática recreativa en general. (¡Lástima no haberlos conocido antes!)

Suerte, y que gane el mejor. Y que tú seas mejor cada día.

A) Escritura de números

1 En busca del récord. (Con cronómetro) A ver cuántos números consecutivos escribes en 2 minutos, a partir del 1.
Variantes: a) A partir del... b) En ... segundos / minutos.

2 Pon a prueba tu calculadora. Sin pulsar «cor-e», a ver cuántos números eres capaz de escribir, separados por un espacio en blanco. Al llegar a números que terminan en 0, pulsa «cor-c» para leer los que llevas escritos... ¿Hasta dónde puedes llegar sin que proteste la calculadora?

3 Tres tropiezos. A partir de un número dado, cada jugador escribe por turno el entero inmediato siguiente. El que se equivoca, «tropieza»; al tercer tropiezo, ya no se levanta: queda eliminado.

Variantes:

a) Hasta que quede un solo jugador, que se anota un punto.

b) (Con cronómetro: 5 minutos.) Cada jugador se anota el número de «tropiezos» (negativos).

c) El jugador que tropieza no se levanta hasta que caiga otro.

4 La tecla estropeada. A tu calculadora se le ha estropeado la tecla n° 2. ¿Qué números puedes escribir entre el 10 y el 40?

Variantes:

a) Entre el... y el... b) La tecla n° 4, 5.

5 Subiendo a zancadas. A partir del 10, cada jugador escribe por turno el entero superior en dos unidades. El jugador que se equivoca anota el número anterior, y se detiene hasta que dé un traspiés su vecino. El juego se termina cuando se alcanza la «cumbre» del 90. Cada jugador anota -guarda en una memoria- el último número que pulsó o anotado al tropezar. La partida termina al completarse la «ronda de empezar», sumándose los números guardados en memoria de las diferentes jugadas.

Variantes:
a) (Con cronómetro.) Hasta que transcurran ... minutos.

b) A partir del...., teniendo como «cumbre» el....

c) Zancadas de 3, 4... unidades.

d) Por parejas: cada jugador prosigue hasta caer, y su compañero, a su turno, retoma la marcha donde aquél cayó.

6 Bajar la escalera. Los jugadores reciben «tres tarjetas». A partir de la «altura» 100, cada jugador escribe por turno el entero inmediato inferior. El que «da un traspiés» (se equivoca) «entrega una tarjeta»; el que pierde las tres, queda eliminado.

Variantes:

a) Bajar 2, 3, 4... escalones.

b) A partir de la «altura»...

*c) Sin tarjetas y con **memorias.** El jugador que «da un traspiés» queda eliminado, y se apunta el escalón en que tropezó.*

7 El número que crece. Cada jugador, a su turno, añade una cifra al número del jugador anterior, con la condición de que no se repitan cifras ni estén contiguas cifras pares ni impares. Si lo consigue, se anota un punto; si se equivoca, se le resta.

Variantes:

a) Retirando la condición de «distinta paridad para cifras contiguas».

b) Lo anotan todos, pero se anota el punto el jugador que antes lo «lea».

c) Lo escriben todos; los que lo hagan correctamente, se anotan un punto, y los que se equivoquen se lo restan.

8 Crecer hecho un lío. Cada jugador, a su turno, escribe un número con una cifra más que el del anterior, sin que haya dos cifras iguales y tal que las cifras del anterior se encuentren en orden distinto. El jugador que tropiece, queda eliminado, anotándose tantos puntos como jugadores se hayan retirado hasta ese momento -él incluido-.

Variantes:

a) Lo escriben todos, anotándose dos puntos el primero que lo lea y uno quienes lo escriban bien.

b) Quien lo consiga, se anota tantos puntos como cifras tenga su número.

9 Crecer cabeza abajo. Cada jugador, a su turno, escribe un número que contenga las mismas cifras que el número del jugador anterior, pero en orden inverso y añadiendo una cifra más, distinta de las otras. Si lo consigue, se anota un punto; si se equivoca o no lo consigue, puede proponer respuesta otro jugador cualquiera, por orden, quien se anotaría el punto.

10 Clavado en su sitio. Se propone un número entero de tres cifras distintas. Cada jugador, a su turno, propone un orden; los restantes, preparan otro número que conserve la cifra de ese orden y permutan las otras. El primero que «lee» su número correcto, recibe dos puntos; los demás, uno, si son correctos.

Variantes:

a) Número propuesto de cuatro, cinco, seis cifras.

b) Fijar dos órdenes, y cambiar la tercera cifra.

c) ídem, permutando las otras cifras.

B) Construcción de números

1 La cifra maldita. La cifra maldita. Imagina que a tu calculadora no se le puede introducir el número «7», porque se vuelve loca. ¿Cómo poner una cantidad que diera como resultado... 7? ¿Y 77? ¿Y 777?

Variantes:

a) Cifra maldita él 8, 9,1...

b) (Con cronómetro.) En 2 minutos, escribir números formados por una misma cifra, maldita en la calculadora. Por cada uno, un punto.

c) (Con cronómetro.) En... minutos, escribir el... con el. cifra maldita. Al jugador que lo consiga con menos signos, 3 puntos; al siguiente, 2; a los restantes, 1; quien no lo consiga, 0.

d) ídem, con menos operaciones.

2 El «cincobasta». Imagina que tu calculadora sólo admite el número 5 y los signos de operaciones. ¿Podrías calcular el ...? Cada jugador, por turno, propone un número de dos cifras; los restantes intentan construirlo. El primero que lo consiga recibe un punto.

Variantes:

a) Con sólo la cifra ...

b) Con sólo la cifra . y las operaciones ..., ¿qué números puedes construir entre el 20 y el 40?

c) (Con cronómetro.) En ... minutos, con sólo la cifra . y las operaciones..., construir cuantos números se pueda entre el... y el... Adjudicar un punto por cada número bien conseguido.

3 El «cincobasta», ahorrando. ¿Cuál es el número menor de veces que debes utilizar para construir con operaciones 37, empleando solamente la cifra del 5?

4 El «cincobasta más-ahorra». Resuelve el ejercicio anterior, de dos formas distintas: sin emplear paréntesis, y empleándolos. ¿A que obtienes respuestas diferentes.

5 Del último al primero. Piensa un número de dos cifras... Súmalas... Si te da un número mayor que 10, vuelve a sumar las cifras de este resultado... Ahora: ¿sabrías calcular el número del principio, empleando solamente esta cifra final y operaciones? ¿Y sin paréntesis?

Variantes:

a) También el anterior y el posterior al número inicial.

b) Con sólo las operaciones ...

c) (Con cronómetro.) En ... minutos, ¿de cuántas formas distintas?

d) ídem, adjudicando puntos por cada forma a cada jugador.

e) ¿Cuál es la expresión más breve?

6 Del último al primero, por el camino más corto. Estoy seguro que has podido hacer el ejercicio anterior. Pero: ¿cuál es el menor número de cifras que puedes emplear?

Variantes:

a) Anterior y posterior.

b) Sin paréntesis.

c) Con sólo las operaciones ...

7 Dos cincos. ¿Qué números se pueden obtener empleando solamente dos cincos?

Variantes: a) cambiar la cifra, b) En un tiempo determinado.

8 Tresicinco. ¿Cuál es el mayor número que puedes obtener empleando solamente un 3 y un 5?

Variantes:

a) Con un dos y un siete.

b) Cuantos números se pueda, en un tiempo determinado.

9 Trío de cuatros. ¿Cuál es el mayor número que puedes obtener empleando solamente tres cuatros?

Variantes:

a) Empleando las operaciones ...

b) Sin/con paréntesis.

c) Cambiando la cifra.

10 El mayor, con tres. Tres jugadores proponen cada uno una cifra. Con ellas, obtener el mayor número posible, sirviéndose de una única operación.

Variantes:

a) Con las operaciones ...

b) Pudiendo utilizar paréntesis.

c) El menor número.

d) El número más próximo a ...

11 Acercarse al objetivo. Se propone un número de dos cifras. Cada jugador elige una cifra distinta y, a su turno, opera el resultado que haya dejado el anterior por ella, intentando aproximarse al «número objetivo», anotando «su diferencia». Al cabo de dos vueltas, cada jugador se anota la suma de «sus diferencias». Pasa a la siguiente fase el jugador que tenga menor «suma no nula de diferencias».

Variantes:

a) Con sólo las operaciones ...

b) Obtener resultados enteros.

c) Obtener resultados menores que el "número objetivo».

d) Obtener resultados mayores que el «número objetivo».

e) Obtener resultados dentro de un cierto intervalo.

12 Eliminar al cómplice. Se propone un número de dos cifras. Cada jugador elige una cifra distinta y, a su turno, opera el resultado que haya dejado el anterior por ella, intentando aproximarse al «número objetivo», anotando «su diferencia». Si un jugador consigue el «número objetivo», queda eliminado el de su derecha -el anterior-. Al cabo de tres vueltas, queda también eliminado el que tenga «mayor suma de diferencias».

Variantes:

a) Con sólo las operaciones ...

b) Obtener resultados enteros.

c) Obtener resultados menores que el «número objetivo».

d) Obtener resultados mayores que el «número objetivo».

e) Obtener resultados dentro de un cierto intervalo.

13 La «diana». Con los números 2, 22, 33 y 333 -y sólo ellos-, aproxímate lo más posible al 100, utilizando los signos de operaciones que quieras.

Variantes:

a) Sin repetirlos.

b) Empleando los cuatro.

c) Puedes usar paréntesis.

d) Sin repetir operaciones.

e) Cambiando el «númerodiana».

f) Cambiando los «númerosproyectil».

14 Con las cifras de un año. ¿En qué año tuvo lugar el descubrimiento de América por Cristóbal Colón?... Utilizando solamente las cifras de esa fecha, y sin repetirlas, construir números entre 30 y 39.

Variantes:

a) (Con cronómetro.) Un punto por cada número construido.

b) Utilizando las cuatro cifras.

c) Sin paréntesis.

d) Pudiendo formar números con dos cifras yuxtapuestas.

e) Determinando operaciones.

f) Cambiando el intervalo de números a construir.

g) Tomando otra fecha, con o sin cifras repetidas.

15 El monolito. En las afueras de una antigua población había un monolito con números grabados: 111, 222..., 999.

Le llamaban «La piedra del 6». Según parece, tuvo pintados en tiempos ciertos signos de operaciones -hoy borrados; quizás también paréntesis-, de forma que el resultado era siempre «6». ¿Podrías tú volver a poner esos signos?

Variantes:

a) (Con cronómetro.) Adjudicar un punto por cada expresión correcta.

b) Incluir la inscripción «000» (empleando factoriales).

c) «La piedra del 3», «del 2»...

d) Expresiones de cuatro cifras:

C) Decimales

1 Milésimas. (Ajustando la «Precisión» a 4) Cada jugador, por turno, propone un número en milésimas; los restantes, lo escriben. El primero que lo «lea» tiene dos puntos, y uno quienes lo escriban bien.

Variantes:

a) Limitar o no el número a proponer a tres cifras (con o sin parte entera).

b) Décimas, centésimas, diezmilésimas.

2 Cambiando el orden. Por turno, cada jugador propone un número en milésimas menor que 1 de tres cifras decimales distintas, lo escribe y lo «lee». El siguiente, propone otro mayor que el anterior -si existe-, de las mismas características y cifras (permutándolas); si no existe, el anterior se anota un

fallo. El jugador que acumule tres fallos queda eliminado.

Variantes:

a) Menor.

b) Sin eliminar jugadores.

c) Con diezmilésimas, cienmilésimas.

3 Mantener el puesto. Se propone un número con dos cifras decimales y dos enteras, distintas entre sí. Cada jugador, a su turno, propone un orden; los restantes, preparan otro número que conserve la cifra de ese orden y permutan las otras. El primero que «lee» su número correcto, recibe dos puntos; los demás, uno, si son correctos.

Variantes:

a) Número propuesto de tres, cuatro... cifras decimales.

b) Fijar dos órdenes, y cambiar las otras cifras, diferentes entre sí.

c) ídem, permutando las otras cifras.

4 Lo que Vd. mande. (Ajustando «Precisión 5») Cada jugador se identifica con un dígito distinto de 0. Por turno, cada jugador propone un número menor o igual a una décima, a la par que indica «mayor» o «menor»; los restantes, escriben números con sólo su cifra significativa, que se ajusten a la propuesta. El primero que lo «lea» -y sea correcto-, recibe dos puntos; los restantes correctos, uno.

Variantes:

a) Propuestas menores o iguales que una centésima, una milésima.

b) Propuesta con la cifra del proponente.

5 Elige tu herramienta. Para cada vuelta, los jugadores eligen un operando del tipo 0,x; por turno, lo suman o restan al resultado del jugador anterior, anotándose la diferencia entre «su resultado» y 1. Se distribuyen puntos según el orden de aproximación, de menor a mayor.

Variantes:

a) Fijando dos, tres operaciones.

b) Orden de diferencias con o sin signo.

c) (Con «memorias») No se adjudican puntos: se acumula la suma de diferencias, con o sin signo.

d) Cada jugador se anota el producto de «su operando» por la diferencia a 1.

6 «Diana móvil». Los jugadores proponen operandos del tipo 0,x, hasta un máximo de 3. El «cabeza» señala una «diana», número entero entre 1 y 9. Todos los jugadores preparan expresiones que resultan de multiplicar por enteros de una cifra los operandos propuestos, sumando / restando estos productos -«combinaciones lineales»-, intentando aproximarse a la «diana». Cada jugador se anota la diferencia entre su resultado y la «diana». Se distribuyen puntos según orden en la aproximación.

Variantes:

a) Resultados menor que el entero propuesto.

b) idem, mayor.

c) Operaciones sin «coeficientes»: sólo con los operandos propuestos.

d) Se elimina el jugador con mayor diferencia.

7 Los cuatro gendarmes. Desde el principio, se acuerdan cuatro operandos del tipo 0,0x. Para cada jugada, el «jugador de cabeza» fija la «diana», un número del tipo 0,z. Todos los jugadores preparan expresiones que resultan de multiplicar por enteros de una cifra los operandos propuestos, sumando / restando estos productos -«combinaciones lineales»-, intentando aproximarse a la «diana». Cada jugador se anota la diferencia entre su resultado y la «diana». Se adjudican puntos según orden de estas diferencias.

b) Resultados menor que el valor propuesto.

c) idem, mayor.

d) Pueden no intervenir todos los operandos.

e) Se elimina el jugador con mayor diferencia.

8 Único arma. Cada jugador propone un operando del tipo 0,a ó 0,0b. El «cabeza» propone un número del tipo 0,xy. Cada jugador presenta expresiones con los operandos disponibles, intentando aproximarse al valor propuesto, anotándose la diferencia. Se adjudican puntos según orden en la aproximación.

Variantes:

a) Resultados menores que el valor propuesto.

b) Determinando operaciones.

c) Se elimina el jugador con mayor diferencia.

d) (Con «memorias») Se acumulan diferencias, con o sin signo.

9 Acercamientos. Se propone un número del tipo 0,ab, con a y b distintas. Cada jugador, por turno, propone otro número formado por sólo una de esas cifras a o b, que suma o resta al resultado del jugador anterior, y que se anota como valor propio. Se parte del valor 1. Se adjudican puntos según el orden en la aproximación a 0,ab.

Variantes:

a) Diferencias con o sin signo.

b) (Con «memorias».) No se adjudican puntos: se acumulan diferencias.

c) Resultados mayores / menores que 0,ab.

d) Se elimina el jugador de mayor diferencia.

e) Con tres cifras a, b y c.

10 La caza del zorro. Cada jugador, por turno, hace el papel de «zorro»: guarda en su memoria x un valor del tipo 0,a, por todos conocido. Cada uno de los restantes jugadores, los «cazadores», intentarán «cazarlo»; su arma será un número del tipo 0,b, distinto de 0,a. Partiendo del 10, alternan jugada el «zorro» y un «cazador» -el que pida: «¡mío!»-, que podrá sumar o restar su valor-disparo a cualquier número entero, encadenándose los resultados del «zorro». El «zorro» no puede salir del intervalo (5, 15) -repetirá «salto»-. Si existe error en la operación-resultado del «cazador», yerra el tiro; el «zorro», no. El primer «cazador» que alcance al «zorro» -coincida su resultado con el del «zorro»-, se anota tantos puntos como indique el entero desde donde disparó. Si en dos «vueltas» el «zorro» sigue vivo, se anota 10 puntos.

Variantes:

a) Fijar los «puestos de disparo» de los «cazadores» a valores de igual parte decimal.

b) Modificar el «punto de partida».

c) Modificar los movimientos del «zorro» a 1,a.

d) Modificar los valores de x y los «disparos» a 1,b.

e) Modificar el «campo de caza».

f) Modificar los valores de x y los «disparos» a 0,b5.

D) Memorias

1 «Letras-ladrillo». Se guardan los números 1, 10, 100 y 1.000 en las memorias a, b, c y d, respectivamente. Cada jugador, por turno, dice un

número de cuatro cifras; los restantes, lo escriben como expresión de suma de productos de dígitos por las memorias a, b, c y d. El primero que «lea» correctamente la expresión, recibe dos puntos; los restantes que den el resultado correcto, uno.

Variantes:

a) Número de cifras.

b) Cambiando las memorias.

c) Modificando los valores de memorias y características de números a proponer: 0,01, 0,1, 1, 10; etc.

2 Sin cifras. Cada jugador dice un número de una cifra, que se guarda en una memoria distinta. Utilizando esas letras una sola vez, y los signos de operación también una sola vez, construir el número mayor. Cada jugador se anota el número por él obtenido.

Variantes:

a) Construir el número menor.

b) Utilizando todas las letras.

c) Utilizando paréntesis.

d) Números en memoria menores que...

3 Navegando. En las memorias correspondientes a la palabra «mar» se guardan tres números. Intercalando signos de operaciones -y conservando el orden de las letras-, construir el número mayor. Cada jugador se anota el número obtenido.

Variantes:

a) (Con cronómetro.) en ... minutos.

b) Pudiendo utilizar paréntesis.

c) El número menor.

d) Pudiendo repetir la operación.

4 «La cosa». En las memorias correspondientes a la palabra «cosa» se guardan cuatro números. Intercalando signos de operaciones, y de forma que la palabra que formen las letras tenga sentido -en español-, construir el número mayor. Cada jugador se anota el número obtenido.

Variantes:

a) (Con cronómetro.) en ... minutos.

b) Pudiendo utilizar paréntesis.

c) El número menor.

d) Pudiendo repetir la operación.

5 Sopa de letras. Cada jugador dice una letra y un número, que se guardará en la memoria correspondiente a aquélla, sin repetir; hasta seis letras. Utilizando algunas de esas letras, sin repetirlas, y las operaciones «+» y «-», construir el número mayor. Cada jugador se anota el número por él obtenido.

Variantes:

a) El número menor.

b) Cambiar operaciones.

c) Sin repetir operaciones.

d) Pudiendo emplear paréntesis.

6 El «masypor» Cada jugador, por turno, propone un número del tipo x'yz; los restantes, asignan valores a las memorias a, b y c, de forma que a+b.c se aproxime lo más posible a x,yz. El primero que dé el resultado correcto se anota dos puntos; los restantes, uno.

Variantes:

a) Limitar tiempo.

b) Modificar la estructura del «valor objetivo».

c) Modificar la expresión.

d) Fijar uno de los valores a, b o c.

E) Funciones

1 Más o menos, lo que tienes en la memoria. Por turno, cada jugador guarda en su «memoria x personal» un número entero que sólo él conoce. Los restantes, por orden, le proponen sumar y restar valores enteros a elección de cada jugador; dando el resultado al final de la ronda. El primero que descubra el valor de x, se anota tantos puntos como jugadores hayan intervenido en el intento (él incluido); si no lo logra ninguno, se los anota el jugador de la «memoria desconocida».

Variantes:

a) Modificar las condiciones para x.

b) Condicionar los valores a sumar / restar.

c) No se puede repetir la operación del jugador anterior.

2 Por y entre, lo que tienes en la memoria. Por turno, cada jugador guarda en su «memoria x personal» un número entero que sólo él conoce. Los restantes, por orden, le proponen multiplicar y dividir por valores enteros a elección de cada jugador; dándose el resultado al final de la ronda (¡atención a la combinación de productos / cocientes!). El primero que descubra el valor de x, se anota tantos puntos como jugadores hayan intervenido en el intento (él incluido); si no lo logra ninguno, se los anota el jugador de la «memoria desconocida».

Variantes:

a) Modificar las condiciones para x.

b) Condicionar los valores a multiplicar / dividir.

c) No se puede repetir la operación del jugador anterior.

3 Con «a» y «b». Por turno, cada jugador guarda en su «memoria x personal» un número entero que sólo él conoce. Los restantes, por orden, le proponen expresiones del tipo ax+b, con los valores de a y b que deseen. El primero que lo descubra, se anota tantos puntos como jugadores hayan intervenido en el intento (él incluido); si no lo logra ninguno, se los anota el jugador de la «memoria desconocida».

Variantes:

a) Modificar las condiciones para x.

b) Modificar la expresión ax+b.

c) Continuar la ronda hasta descubrir el «valor desconocido», o agotar un cierto tiempo.

4 Los dos agentes secretos. Se carga en el B.H. una «macro de calculadora» silenciosa del tipo f=ax+b, con a y b enteros comprendidos entre -9 y +9. Cada jugador, por turno, propone un número x entero no nulo, que todos guardan en la memoria x y ejecutan la función-macro. Al primero que descubra los valores de a y b se le adjudica un punto.

Variantes:

a) Modificar los coeficientes a y b.

b) Ampliar el intervalo de definición de a y b.

c) Proponer valores no enteros.

d) a y b no enteros.

e) Funciones del tipo ax^2 y x^2+b.

5 Ellos dos. Se cargan en el B.H. dos «macros de calculadora» silenciosas del tipo f=ax+b y g=cx+d, con a, b, c y d enteros comprendidos entre -9 y +9. Cada jugador, por turno, propone un número x entero no nulo, que todos guardan en la memoria x, y ejecutan la primera «función-macro» f, guardan el resultado en x y ejecutan la segunda. Se trata de averiguar la fórmula de la función que pasaría directamente del primer valor al último. A cada jugador que lo va descubriendo, se le adjudican tantos puntos como jugadores queden por resolverlo.

Variantes:

a) El primero que lo resuelva, pasa a la fase siguiente.

b) Modificar los coeficientes.

c) Condicionar los valores x a proponer.

d) Ampliar el dominio de los coeficientes a, b, cy d.

e) Cambiar el orden de las funciones.

f) Ejecutar la función compuesta consigo misma.

6 A la caza de coeficientes. Se carga en el B.H. una «macro de calculadora» silenciosa del tipo f=ax+by, con a y b enteros comprendidos entre -9 y +9. Cada jugador, por tumo, propone dos números x e y enteros no nulos, que todos guardan en las memorias x e y, y ejecutan la función-macro. Al primero que descubra los valores de a y b se le adjudica un punto.

Variantes:

a) Modificar los coeficientes a y b.

b) Ampliar el intervalo de definición de a y b

c) Proponer valores x e y no enteros.

d) a y b no enteros.

e) Funciones del tipo x^2+by y ax^2+y.

Volver al Índice / Inicio del Capitulo

ONCE